Math P
632

Jacob Christian Walthers,

Rectors des Pädagogii illustris zu Darmstadt,

erste Grundsätze der Arithmetic.

Zum Gebrauche
desselbigen Fürstlichen Pädagogii.

Frankfurt am Mayn,
bey Johann August Raspe.
1764.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Einem
Hochfürstlich Heßischen
Hochpreislichen
Geheimenraths-collegio,

seinen
Gnädigen und Hochgebietenden
Herrn,
übergiebt
in tiefer Unterthänigkeit
dieses
zu öffentlichem Gebrauche bestimmte
Lehrbuch,
als ein geringes Zeugniß
seiner vollkommensten Devotion,

dankt zugleich unterthänig

für

die bisher gnädig erzeigte Wohlthaten,

deren er ewig wird suchen würdiger

und fähiger zu werden,

und

empfielet sich zu fortdauernder

gnädigen Gewogenheit

Eines Hochpreislichen

Geheimenrathscollegii

Darmstadt
den 1. August
1764.

unterthäniger Knecht

Jacob Christian Walther,
Rector.

Vorbericht.

An den zum theil vortrefflichen Anweisungen zur Arithmetic, welche wir im Teutschen haben, habe ich, und vielleicht nicht ohne Grund, immer dieses zu vermissen gefunden, daß entweder zu wenig Mathematisches, oder aber zu wenig

Deutlichkeit in der Einkleidung und im ganzen Buche anzutreffen war. Wer sich die Mühe geben will, unsere meiste compendia arithmetica, nicht als ein schon Unterrichteter, sondern so, anzusehen, als wolle er selbst die Anfangsgründe der Wissenschaft daraus erst erlernen, oder als wolle er ganz unwissende Anfänger darnach unterrichten; der wird mir Beyfall geben. Aus diesem Grunde habe ich mich, bey meinen bisher gehaltenen arithmetischen Stunden, genöthiget gesehen, einen eigenen Entwurf zum Grunde zu legen; welcher anfänglich, wie alle völlig ungestohlene Arbeit, roh und höchstverbesserungsbedürftig war. Allein nachdem ich das, für mein ganzes Leben, unschätzbare Glück gehabt habe, einen jungen, in hohem Grade vollkommenen, **Fürsten**, in eben diesem Theil der Mathesis zu unterrichten: so verursach=

sachten unterthänigste Pflicht, und ganz unverdiente Gnade dieses Durchlauchtigsten gegen mich, daß ich die im Anfang flüchtig entworfene Sätze in ein System brachte. Und dieses enthalten gegenwärtige Bogen.

Ich habe in denselben mathematische Strenge mit der höchsten Stufe der Faßlichkeit zu vereinigen gesuchet. Ob ich meinen Endzweck erreichet habe, überlasse ich andern, aber wenn ich bitten dürfte, blos Lehrern der mathematischen Arithmetic, zu beurtheilen. An Kaufmannsrechnungen, oder an unnöthige und schwere Curiositätspossen, hat mein Herz niemals gedacht, sie deutlich und mathematisch zu machen.

Darjes, de Rees, Hederich, Gemma, Frisius und wenige andere habe ich hie und da, mit grosem Nutzen, zu Rathe gezogen. Der ewig grose Wolf aber ist von allem die Grundlinie. Eigenes habe

habe ich an einigen Orten beygefüget: z. E. bey der Berechnung der Bruchmultiplication und Division, bey den doppelten Brüchen, bey der Quadrat- und Cubicrechnung u. s. w. Einkleidung und Methode ist, wie man leicht siehet, Nachahmung von Wolf und A. G. Baumgarten.

Sollte diese meine Arbeit, die für Schüler, aber freylich für gute Schüler, geschrieben ist, Beyfall finden, so dürfte mich derselbe so muthig machen, daß ich auch, mit der Zeit, eine Schulgeometrie von dieser Art vollendete; denn das wichtigste ist schon durchgearbeitet.

Darmstadt
den 1. Aug. 1764.

J. C. Walther,
Rector.

Einleitung
in
die reine Mathesis.

§. 1.

Was man von einer Sache sagen kann, das ist eine **Bestimmung** davon (determinatio). Eine Bestimmung, die ohne Annehmung eines dritten Dinges (d. i. eines **Maaßstabes** nicht völlig kann erkannt werden, ist eine **Gröse** (quantitas). Die Wissenschaft von der Gröse ist die **Mathesis** (mathematica, a græco μανθάνω).

§. 2.

Die **Grösen** werden entweder ganz allgemein d. i. *in abstracto* betrachtet; oder sie werden betrachtet, wie sie sich in dieser oder iener besondern Sache befinden d. i. *in concreto*. Die Wissenschaft von den Grösen in abstracto ist die **reine Mathesis** (pura). Die Wissenschaft von den Grösen in concreto ist die **unreine Mathesis** (impura, adplicata, mixta): z. E. Die reine Mathesis rechnet und misset aus, die Materie der berechneten und gemässenen Dinge mag bestehen, woraus sie will. Die applicirte kann nicht Bomben mit Wettergläsern werfen, oder die Schwere der Luft mit einem Feuermör-

ser finden. Sie ist an besondere Dinge und Materien gebunden.

§. 3.

Zu der reinen Mathesis gehören:

1) Die Rechenkunst, oder Arithmetic.
2) Die Geometrie, oder Mäßkunst.
3) Die Trigonometrie.
4) Die Algebra.

§. 4.

Ein **Begriff** (conceptus) ist eine Vorstellung von etwas in der Sele. Ein Begriff enthält entweder Kennzeichen der vorgestellten Sache, oder nicht: d.i er ist entweder **deutlich**, oder nicht. Wenn ein deutlicher Begriff just so viele Merkmahle der Sache enthält, als derselben nöthig sind, um sie von allem andern zu unterscheiden, so ist er **bestimmt** (determinatus), und man nennet ihn eine **Erklärung** (definitio).

§. 5.

Die **Erfahrung** (experientia) ist diejenige Erkenntniß, welche man erlanget, wenn man auf seine Empfindungen Acht giebet. z. E. Man weiß den Geruch der Blumen, die Schönheit der Schildereyen, die Annehmlichkeit der Music aus der Erfahrung; denn man empfindet sie.

§. 6.

Wenn man einer Sache Bestimmungen beylegt, oder abspricht, so **urtheilet** man von ihr (iudicamus). Ein Urtheil, das durch gewisse Zeichen ausgedruckt wird, ist ein **Satz** (propositio, enunciatio, thesis). Ist ein Satz blos aus der Erfahrung hergenommen, so heist er ein **Erfahrungssatz** (eine Erfahrung, instantia).

§. 7.

Alles, was da anzeiget, daß etwas zu thun sey, oder gelassen werden müsse, ist **practisch**: was nicht practisch ist, und doch in Erkenntniß bestehet, ist **theoretisch**.

§. 8.

Wenn man durch Vergleichung gewisser Sätze einen neuen Satz herausbringet, so **schlüsset** man (ratiocinamur). **Beweisen** heist einen Satz aus andern richtig herausbringen (demonstrare).

§. 9.

Ein Satz, der keines Beweises bedarf, und theoretisch ist, heiset ein **Grundsatz** (axioma). Ist ein solcher Satz aber practisch; so heiset er ein **Heischesatz** (postulatum).

§. 10.

Ein Satz, der eines Beweises bedarf, und theoretisch ist, heiset ein **Lehrsatz** (theorema). Ist ein solcher Satz aber practisch, so nennet man ihn **Aufgabe** (problema). Die Aufgaben bestehen oft in Fragen, und denn nennet man ihre Beantwortung die **Auflösung** (resolutio).

§. 11.

Ein Satz, der, ohne Umstände, unmittelbar aus dem vorhergehenden geschlossen wird, heiset eine **Folgerung** (ein Zusatz, (corollarium). Ein Satz, der blos eine Erläuterung des vorhergehenden enthält, ist eine **Anmerkung** (nota, scholion). Ein Satz, der, ohne Beweise anzuführen, aus einer ganz anderen Wissenschaft hergenommen wird, ist ein **Lehnsatz** (lemma). Werden practische Sätze auf einen bestimmten Fall angewendet, so heist solches ein **Exempel**.

§. 12.

Die **mathematische Lehrart** (methodus mathematica) kommt darauf an, daß man alle Lehrsätze und Aufgaben aus Erklärungen, Grundsätzen, Heischesätzen und Erfahrungen richtig beweiset; so daß immer das Vorhergehende das Nachfolgende verständlich machet. Man richtet sich dabey nach den strängsten Gesetzen des Verstandes.

§. 13.

Die Theile einer Sache müssen entweder nothwendig beyeinander seyn, oder nicht. Im ersteren Falle ist ihre Gröse **stätig** (continua); z. E. Bey der Höhe eines Thurnes, bey der Schwere einer Unze Goldes. Im andern Falle ist die Gröse **unterbrochen** (discreta); z. E. Bey einem Haufen Sandkörner. Eine unterbrochene Gröse, die mit Zeichen ausgedruckt wird, ist eine **Zahl** (numerus); z. E. Eine Million Menschen. Alle stätige Grösen können auch als unterbrochene betrachtet werden, und also kann man sie auch durch Zahlen erkennen.

§. 14.

Dinge, davon Eines an die Stelle des andern kann gesetzet werden, sind **einerley** und **kommen mit einander überein** (eadem sunt & conueniunt inter se). Dinge, die in Grösen einerley sind, heisen **gleich** (æqualia). Dinge, die in andern Bestimmungen übereinkommen, sind **ähnlich** (similia). Und was gleich und ähnlich ist, heist **congruent**. Das Zeichen der Gleichheit ist: (=), das Zeichen der Aehnlichkeit: (∼), das Zeichen der Congruenz ist: (≅)

§. 15.

Gröser als ein anderes (maius) ist dasjenige, von dem ein Theil dem ganzen andern gleich ist. Kleiner (minus) als ein anderes ist das, welches, ganz genommen, nur einem Theile des anderen gleich ist. Wenn das Zeichen ($>$ oder $<$) zwischen zwey Grösen stehet, so zeiget es an, daß die Gröse, wonach seine Spitze gerichtet ist, kleiner sey, als die andere.

Die
Rechenkunst.

Erklärung.

§. 1.

Die Rechenkunst (arithmetica) ist die Wissenschaft, durch Vergleichung einiger Zahlen neue Zahlen zu finden.

Heischesatz.

§. 2. Wer rechnen will, muß Zahlen aussprechen und ausdrücken d. i. zählen können.

Erfahrung.

§. 3. Die in Europa ietzt gewöhnlichste Art zu zählen (calculus), drucket alle Zahlen durch folgende Zeichen d. i. Ziffern aus: 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Zusatz.

§. 4. Dies würde unmöglich seyn, wenn nicht iede dieser Ziffern neue Bedeutungen durch die Stellen bekäme, an die sie gesetzet wird. Die leere Stellen zu bezeichnen braucht man die Nullen.

Erfahrung.

§. 5. Die Ziffern in der letzten Stelle bedeuten Einheiten, in der ohneinsletzten Zehener, in der dritten Hunderte, in der vierten Tausende, in der fünften Zehentausende u. s. f.

So

So ist z. E. in der Zahl 1763 die letzte Zahl (3) drey Einheiten, die ohneinsletzte (6) sechs Zehener, die dritte von hinten (7) sieben Hunderte, und die vierte (1) Ein Tausend.

Erklärungen.

§. 6. Die Zahlen von 1 - 9 sind **Einheitszahlen** (Einheiten, numeri monadici); zehen Einheiten sind ein **Zehent** (decuria); zehen Zehente sind ein **Hundert** (centuria); zehen Hunderte sind ein **Tausend** (millenarius, chilias); zehen Tausende sind eine **Myriade** (myrias); tausendmaltausend Einheiten sind eine **Million**; tausendmaltausend Millionen sind eine **Billion**; tausendmaltausend Billionen sind eine **Trillion**. Und so gehet es fort zu **Quadrillionen, Quintillionen, Sexillionen, Septillionen, Octillionen, Novendillionen**, und **Decatillionen**.

Aufgabe.

§. 7. Wie soll man eine iede gegebene Zahl aussprechen?

Auflösung.

1. Man mache in der gegebenen Zahl bey ieder dritten Ziffer ein Comma; und fange hiebey von der letzten Zahl an.

2. Man mache bey dem zweyten Comma von hinten an oben **Einen Punct**; bey dem vierten Comma mache man zwey Puncte; bey dem sechsten drey, bey dem achten vier; u. s. f.

3. Man spreche die einzelne Ziffern nach ihrer Stelle (§. 5.), die blose Commata durch

Tau-

Tausend, den Einzelen Punct durch Millionen, die zwey Puncte durch Billionen, die drey Puncte durch Trillionen u. s. w. aus.

Exempel.

47,304,187,679,075,398,311,764

Wird ausgesprochen: Sieben und vierzig tausend, dreyhundert und vier Trillionen; hundert und sieben und achtzigtausend, sechshundert und neun und siebenzig Billionen; fünf und siebenzigtausend, dreyhundert und acht und neunzig Millionen; dreyhundert und elftausend, siebenhundert und vier und sechzig (Einheiten).

Beweis

Wenn man die Zahlen durch Striche und Puncte also abtheilet, so ist es eben so gut, als wenn man sie in ihre Columnen oder Stellen abtheilete; und solche hernach mit Zahlen beschriebe: Man spricht sie also recht aus §. 5, 6. W. Z. T. W.

Anmerkung.

§. 8. Die Römer zähleten mit folgenden Zeichen: I = 1; V = 5; X = 10; ↄ = 50; c = 100; Iↄ = 500; cIↄ = 1,000; Iↄↄ = 5,000; ccIↄↄ = 10,000; Iↄↄↄ = 50,000; cccIↄↄↄ = 100,000; Iↄↄↄↄ = 500,000; ccccIↄↄↄↄ = 1,000,000. Die Art mit Rechenpfenningen zu zählen ist fast einerley mit der unserigen: Nur zählet man von oben herunter, und brauchet einerley Zeichen.

Auf-

Aufgabe.

§. 9. Wie schreibet man iede gegebene Zahl?

Auflösung.

1. Man lasse sich die Zahl ganz langsam aussprechen, und bey iedem Tausend, bey ieder Million, Billion u. s. w. inne halten.

2. Man schreibe iede gesprochene Hunderte, Zehente und Einheiten an ihre Stelle (§. 5.)

3. Sobald Tausende kommen, mache man unten ein Comma; bey Millionen oben Einen Punct; bey Billionen zwey u. s. w. (§. 7.)

4. Fehlt es in den Hunderten, Zehenten oder Einheiten, so zeiget man diesen Mangel durch Nullen an §. 4.

Exempel.

Die Zahl: Vierhundert zwey und dreyßig tausend, zweyhundert sechs und sechzig Billionen; siebenhundert neun und neunzig tausend, achthundert vier und vierzig Millionen; sechshundert tausend, sechshundert und sechzig, wird folgendergestalt geschrieben:

432,266¨799,844˙600,660.

Beweis.

Ist einerley mit dem Beweise des §. 7.

Erklärungen.

§. 10. **Gleichnamige Zahlen** (Zahlen von einerley Art, numeri eiusdem nominis) sind die, welche Dinge anzeigen, die einen gemein-

schaft-

schaftlichen Begriff, oder Namen haben. z. E. 12 (Pferde) und 23 (Pferde); 6 (Mann) und 10 (Mann). **Zahlen**, welche Dinge anzeigen, die keinen gemeinschaftlichen Begriff haben sollen, sind **von verschiedener Art** (diuersi nominis). z. E. 8 (Pflanzen), 6 (Steine), 3 (Thiere).

Erklärungen.

§. 11. **Eine Zahl wird vergrößert**, wenn man andere gleichnamige Zahlen hinzusetzet; **verringert**, wenn man dergleichen von ihr wegnimmt.

Grundsatz.

§. 12. Alle Zahlen **können vergrößert und verringert werden.**

Folgerung.

§. 13. Also kann man eigentlich nur auf zweyerley Art rechnen §. 1. Doch weil iede dieser beyden Arten wiederum auf doppelte Weise vorgenommen werden kann, so hat man daher die vier Rechnungs-Arten (*Species*) bekommen: Addition, Subtraction, Multiplication und Division. Das Numeriren ist keine Species §. 1.

Grundsatz.

§. 14. Eine iede Gröse und Zahl ist sich selber gleich. z. E. Achte ist Achte, 7=7, 3=3.

Grundsatz.

§. 15. Wenn zwey Grösen, oder Zahlen, einer dritten gleich sind, so sind sie sich unter einander selber

selber gleich. z. E. 5 und 3 ist = 8, 7 und 1 ist auch = 8, also ist 5 und 3 = 7 und 1.

Erklärungen.

§. 16. **Addiren** heist zu einer gegebenen Zahl andere Zahlen hinzuzählen. Die Zahlen, welche man zusammenzählet, heisen die **Summirende**; die neue Zahl aber, welche aus der Zusammenzählung entstehet, nennt man die **Summe**. Werden einige Summen zusammen gezählet, so heiset die daraus entstehende neue Summe, *Summa Summarum*. z. E. 5 und 8 sind 13, zählet man diese zusammen, so addiret man 5 zu 8. Eben diese 5 und 8 sind die summirende Zahlen, und 13 ist die Summe. Nimmt man nun noch 3 und 7, so machet deren Summe 10. Zählet man endlich die Summe 10 zu der Summe 13, so bekommt man 23, als die Summam Summarum.

Anmerkung.

§. 17. Sonst erkläret man das Addiren auch also: Addiren heist eine Zahl finden, welche etlichen gegebenen anderen Zahlen zusammengenommen gleich ist. Das Zeichen der Addition ist (+). Es wird durch **und**, oder *plus* ausgesprochen. z. E. 7 + 20 bedeutet, daß diese zwey Zahlen addiret werden sollen, und man spricht aus: Sieben und zwanzig, oder sieben plus zwanzig.

Aufgabe.

§. 18. Wie soll man jede gegebene Zahlen addiren?

Auf-

Auflösung.

1. Man schreibet die gegebene Zahlen nach ihren gehörigen Stellen über einander §. 9, und ziehet, um alle Verwirrung zu vermeiden, unter die unterste davon einen Strich.

2. Man zählet alsdenn die Zahlen in ieder Columne, als Einheiten betrachtet, zusammen. Hiebey fängt man an der letzten Columne an.

3. Wenn diese Summe alsdenn unter Zehen ist, so schreibet man sie unter den Strich gerad unter die Columne, woraus man sie zusammen gezählet hat.

4. Wenn die Summe über Zehen ist, so schreibet man ihre letztere Ziffer unter ihre Columne, wie nr. 3. Die erstere Ziffer aber zählet man, als Einheiten, in der Zusammenzählung der nächstfolgenden Columne mit.

5. Bekommt man oben lauter Nullen, so kommt unten hin auch eine Nulle.

Exempel.

Es soll addiret werden: Tausend sechs und neunzig, vierhundert und fünf, und dreytausend zweyhundert; so schreibet man nach nr. 1:

	1096		1096
Geschrieben	405	Addirt	405
	3200		3200
			4701

Alsdenn zählet man die Zahlen der letzten Columne zusammen: 6 und 5 sind 11; nach nr. 2.

Hievon kommt die letztere Ziffer 1 unter das letzte (0), das oben ist; nach nr. 4. Die erstere Ziffer 1, zählet man zu der folgenden Columne; so hat man 10; nach nr. 4. Die letzte Ziffer ist hier (0), die kommt unten hin. Das 1 wird zur folgenden Columne gezählet, so hat man 7; Dies kommt gleich unten hin; nach nr. 3. Und so ist es auch bey der ersten Columne. Die Summe ist also: Viertausend siebenhundert und Eins.

Beweis.

Auf diese Weise werden Einheiten zu Einheiten, Zehener zu Zehenern, Hunderte zu Hunderten u. s. f. zusammengezählet: Folglich wird addiret §. 16. W. Z. E. W.

Anmerkung.

§. 19. Die gewöhnliche **Proben** d. i. practische Beweise von der Richtigkeit der Rechnung in der Addition sind betrüglich, oder doch sehr weitläuftig; daher lassen wir sie weg. Die beste Probe aller Rechnungen ist, daß man noch einmal oder etlichemal nachrechnet.

Anmerkung.

§. 20. In römischen Zahlen fänget man von dem Zeichen I an; verwandelt immer so viele kleine Zeichen in die nächste grösere, als man nur kann; bemerket besonders die Reste der kleineren Zeichen; und spricht solche endlich mit der herausgebrachten Summe zusammen aus.

An-

Anmerkung.

§. 21. Mit Rechenpfennigen addiret man, durch Zulegung der Summirenden an ihre rechte Stellen; wobey nur dies noch zu merken ist, daß man, so oft in Einer Reihe zehen oder mehr Pfennige liegen, zehen wegnehme, und dafür Einen in die nächste Reihe darüber lege.

Grundsatz.

§. 22. Gleiches zu gleichem addiret giebt gleiche Summen. z. E. Die Summe von 3 + 7 ist = 10, und die Summe von 6 + 1 + 2 + 1. ist auch = 10.

Erklärung.

§. 23. **Subtrahiren** (abziehen) heist von zwey gegebenen Zahlen die kleinere von der grösseren Einmal wegnehmen. Was alsdenn von der grösseren Zahl übrig bleibet, ist der **Rest** (differentia). z. E. Wenn 5 von 7 Einmal weggenommen wird, so bleibet 2 übrig. Alsdenn wird 5 von 7 subtrahiret, und 2 ist die Differenz.

Anmerkung.

§. 24. Sonst erkläret man das Subtrahiren auch also: Subtrahiren heiset eine Zahl finden, welche mit Einer gegebenen Zahl von Einer Art zusammen genommen einer anderen gegebenen Zahl gleich ist. Das Zeichen der Subtraction ist (—), und wird durch **von** oder *minus* ausgesprochen. z. E. 5 — 8 bedeutet, daß die erste Zahl 5 von der andern 8 abgezogen werden solle,

und man spricht 5 — 8 aus, entweder: Fünf abgezogen von acht, oder achte minus fünfe.

Aufgabe.

§. 25. Wie werden zwey gegebene Zahlen von einander subtrahiret?

Auflösung.

1. Man schreibet die kleinere Zahl unter die grösere, nach beyder einzeler Ziffern Stelle §. 9. Unten ziehet man einen Strich, wie bey der Addition §. 18. Aufl. nr. 1.

2. Man ziehet Einheiten von Einheiten, Zehener von Zehenern, Hunderte von Hunderten u. s. w. ab, und fängt dabey von hinten an d. i. von der Linken. Was iedesmal übrig bleibet, das setzet man unter den Strich und die gehörige Stelle; wie §. 18. nr. 3.

3. Ist von einer kleineren Zahl eine grösere abzuziehen, so nimmt man zu der kleineren oben von der Zahl linker Hand Eins; dies Eins wird sodenn in der nächstfolgenden rechten Columne Zehen §. 5. Wo man nun auf diese Art Eins weggenommen hat, da machet man, zur Erinnerung, einen Punct.

4. Stehet oben eine Nulle, so gehet man so lange nach der linken Hand fort, bis man Eins nehmen kann, wie nr. 3. An die Stellen der vorhergehenden durchlaufenen Nullen kommen alsdenn Neuner; vermöge des §. 5.

Exem-

Exempel.

Es sollten abgezogen werden 1'739,076 von 58'000,351; so schreibet man sie, nach nr. 1. also unter einander:

Geschrieben	58000351	Subtrahirt	58000351 (99 über den Nullen; Puncte darüber)
	1739076		1739076
			56261275

Alsdenn soll man 6 von 1 abziehen, daher nimmt man 1 von den 5 linker Hand, und bemerkt solches durch einen Punct (nr. 3). Es bleiben also im Rest 5, welche unten hin gesetzet werden (nr. 2). Das punctirte 5 ist demnach jetzo nur 4. Weil man davon 7 abziehen soll, so gehet es, wie vorher; man entlehnet. In der dritten Columne wird (0) von 2 (oder 3) abgezogen: d. i. es kommen unten 2. In der vierten Columne soll 9 von 0 subtrahiret werden; daher werden die Nullen alle punctiret und die erste mit 9 überschrieben (nr. 4). In der fünften Columne ziehet man alsdenn 3 von 9 ab. Und so gehet es fort, daß endlich die Differenz dieser beyden Zahlen ist: Sechs und funfzig Millionen, zweyhundert und ein und sechzig, zweyhundert und fünf und siebenzig (Einheiten).

Beweis.

Auf diese Weise werden alle Einheiten, Zehener u. s. f. der Einen kleineren Zahl Einmal von den Einheiten, Zehenern u. s. f. der anderen grö-

gröseren Zahl weggenommen. Folglich wird auch die ganze kleinere Zahl von der gröseren Einmal weggenommen, d. i. subtrahiret §. 23.

Anmerkung.

§. 26. Zur Probe der Subtraction, addire man die Differenz zu der kleineren Zahl, so kommt die grösere wieder §. 23.

Anmerkung.

§. 27. Mit römischen Zahlen wird subtrahiret, wenn man einzele Zeichen der kleineren Zahl in der gröseren auslöschet. Kommen in der kleineren Zahl Zeichen vor, welche nicht in der gröseren sind, so verwandele man Eins von den nächsten gröseren Zeichen in seine kleinern, und verfahre darauf ordentlich.

Anmerkung.

§. 28. Bey Rechenpfennigen nimmt man von ieder Reihe die Theile der kleineren Zahl weg. Ist das Abzuziehende gröser, als was in der Reihe lieget, so leget man zehen Pfennige in selbige Reihe, nimmt dafür Einen aus der nächsten Reihe drüber hinweg, und verfähret ordentlich.

Grundsatz.

§. 29. Gleiches von gleichem subtrahiret, giebt gleiche Reste. z. E. 8 — 12 = 4, und 3 + 5 — 4 + 8 = 4.

Erklä-

Erklärung.

§. 30. Das **Einmaleins** (tabula Pythagorica) ist ein Verzeichniß der Summen, welche herauskommen, wenn man einen numerum monadicum so oft nimmt, als der andere numerus monadicus Eins in sich begreifet. Es ist in folgendem Täflein enthalten:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Erklärungen.

§. 31. **Multipliciren** heist von zwey gegebenen Zahlen die Eine so oft nehmen, als die andere Einheiten begreifet. Die gegebene Zahlen nennet man die **Factores**: und im Verhältniß gegen einander ist Eine der **Multiplicator** (numerus multiplicans), die andere

das Multiplicandum. Die dritte Zahl, welche durch die Multiplication herauskommt, heist das Facit (das Product, factum). z. E. Wenn man 25 mit 4 multipliciren soll, so nimmt man 25 viermal; dies macht 100 aus. Hier sind die zwey Zahlen 25 und 4 die Factores, und zwar ist 25 das Multiplicandum, und 4 der Multiplicator. Die Zahl 100 aber ist das Facit.

Zusatz.

§. 32. Multipliciren ist also so viel, als eine Zahl mehrmal zu sich selber addiren § 31, 13.

Anmerkung.

§. 33. Sonst erkläret man das Multipliciren auch also: Multipliciren heist aus zwey gegebenen Zahlen eine dritte finden, in welcher die Eine gegebene Zahl so vielmal enthalten ist, als die andere gegebene Zahl Eins in sich begreifet. Das Zeichen der Multiplication ist (·) und wird durch mal ausgesprochen. Man merke die Redensarten davon z. E. 3 · 5 = 15 d. i. dreymal fünf ist funfzehen; oder 3 multiplicirt mit 5 facit 15; oder das Product aus 3 in 5 giebt 15.

Aufgabe.

§ 34. Wie werden zwey gegebene Zahlen mit einander multiplicirt?

Auflösung.

1. Man schreibet die Factores nach §. 5, 2. unter einander, und ziehet unter sie einen Strich. Gewöhnlicher Weise schreibet man den kleineren Factor, als den Multiplicator, unter den grösseren, als das Multiplicandum.

2. Man

2. Man fänget hinten an, und nimmt, nach Angabe des Einmaleins §. 30. jede Ziffer des Multiplicandi so oft, als die vorhandene Ziffer des Multiplicators Einheiten begreifet.

3. Die Producte hieraus kommen unter den Strich, so daß allemal das Product aus einer Ziffer des Multiplicators in das ganze Multiplicandum Eine Reihe ausfüllet. So viele Ziffern also der Multiplicator hat, so viele Reihen von Factis kommen. Vergl. mit nr. 1.

4. Diese Reihen werden nach Angabe des §. 5, 9. und §. 18. nr. 3. 4. unter einander geschrieben.

5. Sind hinten an den Factoribus Nullen, so schneidet man solche gleich ab, und setzet sie, nach vollendeter Rechnung, hinten an das gesammte Product an §. 4.

6. Endlich addiret (oder summiret) man alle einzele Producte zusammen.

Exempel.

Es sollten mit einander multipliciret werden: 30,410 und 3,670; so schreibet man, nach nr. 1. dieselben also:

Geschrieben	30410	Multipliciret	3041(0
	3670		367(0
			21287
			18246
			9123
			111'604,700

Alsdenn schneidet man gleich die Nullen an den Factoren ab (nr. 5). Man fängt nachher bey den letzten Zahlen 7 und 1 an, und saget: Einmal 7 ist 7 (nr. 2.). Diese 7 kommen gerade unter das 7 des Multiplicators (nr. 3. 4.). Ferner sagt man: Viermal 7 ist 28. Hievon kommt die letzte Ziffer 8 unter das 4 des Multiplicandi, und die 2 werden zu der folgenden Columne gerechnet, wie bey der Addition §. 18. (nr. 4). Weiter saget man: Siebenmal Nulle ist Nulle. Hier sollte also unten eine Nulle kommen §. 4. Weil aber von dem vorigen Producte 28 die 2 übriggeblieben sind, so müssen diese ietzo, als Zehener der vorigen Columne betrachtet, an den Platz dieser (0) kommen. Endlich saget man: Dreymal 7 ist 21, und schreibet diese 21 vornen hin. So ist die Eine Reihe, nach nr. 3. ausgefüllet. Fähret man nun fort, und multipliciret das Multiplicandum mit der folgenden Ziffer des Multiplicators 6, so ist zu merken, daß diese Ziffer 6 hier nicht sechse, sondern sechzig bedeute, nach §. 5. Daher folget, daß alle Producte aus diesem 6 in das Multiplicandum nothwendig um Eine Stelle weiter vorgerücket werden müssen; weil man in ihnen keine Einheiten sondern lauter Zehener hat §. 5. Sonst wird bey dieser Reihe, wie bey der ersten, verfahren. Die Ziffern der dritten Reihe, welche aus dem 3 des Multiplicators in das Multiplicandum entstehen, kommen, weil 3 hier 300 ist, noch Eine Stelle weiter hervor, §. 5. Sonst wird wieder, wie bey der

ersten Reihe, gerechnet. Zuletzt addiret man die drey Reihen von Producten, nach §. 18. und setzet die zwey abgeschnittene Nullen hinzu (nr. 5). Denn diese konnten nichts in der Rechnung thun, als das gesammte Facit um zwey Stellen weiter hervorrücken; welches kurz und eben so durch diesen Vortheil geschiehet.

Beweis.

Auf diese Weise werden alle Theile und Ziffern des Einen Factors so oft genommen, als alle Theile des andern Factors Einheiten begreifen. Folglich wird der ganze Eine Factor so oft genommen, als der ganze andere Factor Einheiten begreifet: d. i. die beyde gegebene Zahlen werden mit einander multipliciret §. 31.

Anmerkung.

§. 35. Das Multipliciren mit römischen Zahlen und mit Rechenpfennigen ist gar zu weitläuftig: es verdienet also keine umständliche Erläuterung.

Grundsatz.

§. 36. Geiche Factores geben gleiche Facta: d. i. Gleiches mit gleichem multiplicirt, giebt gleiches. s. §. 22, 23.

Anmerkung.

§. 37. Johann Nepper, ein schottischer Baron, hat eine Art der Multiplication erfunden, die nicht so sehr als die gewöhnliche ermüdet.

Näm-

Nämlich, es werden viereckigte Stäbgen, auf ihren vier Seiten, mit viererlei Columnenzahlen des folgenden Täfleins bekleidet:

BACILLI NEPPERIANI.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Index
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
2	4	6	8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8	0	2
3	6	9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7	0	3
4	8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6	0	4
5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5	0	5
6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4	0	6
7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3	0	7
8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2	0	8
9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	0	9

Aufgabe.

§. 38. Wie multipliciret man mit diesen bacillis Nepperianis?

Auflösung.

1. Man leget das Multiplicandum, nach Anzeige der obersten etwas gröser geschriebenen Zahlen, hin.

2. Man

2. Man zählet nach Anweisung des indicis, der hinten geleget wird, die Zahlen, welche in einerley geschobenem Quadrate stehen, zusammen.

3. Man schreibet sie, nach der gehörigen Stelle des Multiplicators, auf; wie §. 34. nr. 3, 4.

4. Wenn in dem Multiplicator eine Nulle ist, so setze man, nach §. 5. die darauf folgende Reihe Zahlen eine Stelle weiter hervor, und summire endlich.

Beweis.

In diesen bacillis ist das Einmaleins schon enthalten, s. §. 30. und durch die Querstriche sind alle Zehener schon zu der folgenden Columne gezählet. Folglich bleibet nichts zur Multiplication übrig, als zu schreiben und zu summiren. §. 34.

Anmerkung.

§. 39. Diese leichte Art zu multipliciren brauchet man nur bey weitläuftigen und langen Exempeln. Daher muß man einige Dutzend solcher Stäbchen haben: man braucht aber nur Einen Index.

Erklärung.

§. 40. **Dividiren** heiset von Einer gegebenen Zahl die andere so oft wegnehmen, als sie darinn enthalten ist. Die Zahl, von welcher man hiebey die andere wegnimmt, heist das **Dividendum** (numerus diuidendus, diuisum). Die andere Zahl, die davon weggenommen wird, heist der **Divisor** (numerus diuidens). Und die dritte Zahl, so alsdenn herauskommt, und

so vielmal Eins enthält, als der Divisor im Dividendo enthalten ist, heist der **Quotient** (numerus quotus, quotum). z. E. Wenn man 35 mit 7 dividiren sollte, so siehet man aus dem Einmaleins §. 30, daß 7 in 35. fünfmal enthalten sey. Man schreibet also 5 hin. Hier ist 35 das Dividendum, 7 der Divisor, und 5 der Quotient.

Zusatz.

§. 41. Dividiren heist also soviel, als Eine Zahl von der anderen etlichemal subtrahiren §. 40, 13.

Anmerkung.

§. 42. Sonst erkläret man das Dividiren auch also: Dividiren heist aus zwey gegebenen Zahlen eine dritte finden, welche andeutet, wie vielmal die Eine gegebene Zahl in der andern enthalten ist. Das Zeichen der Division ist (:), und wird ausgesprochen: **in, mit, durch.** z. E. 3 : 15 spricht man aus: drey dividirt **in** funfzehen; 15 : 3 aber: funfzehen dividirt **mit**, oder **durch**, drey.

Aufgabe.

§. 43. Wie wird eine Zahl durch die andere dividiret?

Auflösung.

1. Man schreibet das Dividendum hin, machet auf beyden Seiten desselben einen Strich, und setzet den Divisor neben den Strich linker Hand.

2. Man fänget linker Hand d. i. vornen bey dem Dividendo an, und siehet nach §. 30, wie viel-

vielmal der Divisor in der ersten Zahl des Dividendi stecke? das iedesmalige Quotum setzet man hinter den Strich rechter Hand.

3. Man multipliciret dieses Quotum mit dem Divisor, und schreibet das daraus entstehende Facit, nach §. 5, unter die vorhabende Zahl des Dividendi.

4. Man subtrahiret es alsdenn von der vorhabenden Zahl des Dividendi, und schreibet die Reste, nach §. 5, oben über das Dividendum.

5. Darauf verfähret man mit den noch vorhandenen Zahlen des Dividendi eben so: setzet also den Divisor in Gedanken immer eine Stelle weiter nach dem Ende fort, und schreibet die folgende Quotienten immer hinter den ersten.

6. Kann der Divisor von einer vorhabenden Zahl des Dividendi gar nicht abgezogen werden, so machet man eine Nulle in die vorhabende Stelle des Quotienten, und fähret, nach nr. 5. fort zu rechnen.

7. Bleibt am Ende eine Zahl übrig, welche kleiner als der Divisor ist, so schreibt man sie mit dem Divisor in einen Bruch; wovon unten §. 61 u. f.

Exempel.

Es sollten 9817 mit 2 dividirt werden; so schreibet man, nach nr. 1. solches also:

Geschrieben	2	9817	Dividirt	2	9817 8816	$4908\frac{1}{2}$

Als.

Alsdenn ersiehet man aus dem Einmaleins, daß 2 in 9 viermal enthalten sey. Man setzet also hinten 4 hin, nach nr. 2. Hierauf multiplicirt man dieses Quotum 4 mit dem Divisor 2, so hat man achte. Dieses 8 wird unter die 9 vornen geschrieben (nr. 3), und davon subtrahiret; den Rest 1 schreibt man über die 9 (nr. 4.). Die Ziffern 9 und 8 werden, der Deutlichkeit halber, ausgestrichen. Sodenn ersiehet man wieder aus § 30, daß 2 in 18 neunmal stecke, und verfähret also, wie vorher (nr. 5). Bey der folgenden Ziffer 1 siehet man, daß zwey nicht könne davon abgezogen werden, man setzet also hinten eine Nulle (nr. 6). Man fähret bey der letzten Zahl 17, wie vorher bey 18, fort, und weil da 1 überbleibt, so schreibt man den Divisor 2 unten, und 1 oben in den Bruch $\frac{1}{2}$ (nr. 7).

Beweis.

Auf diese Weise wird der Divisor von den Tausenden, Hunderten, Zehenern und Einheiten des Dividendi so vielmal weg genommen, als er darinnen enthalten ist. Folglich wird er von dem ganzen Dividendo so oft weg genommen, als er darinn steckt. d. i. Man hat dividiret § 40.

Zusatz.

§. 44. Kann man in der Division den Divisor zehenmal von einer vorhandenen Zahl des Dividendi weg nehmen, so hat man ihn vorher Einmal zu wenig genommen. Man muß also von neuem das vorige rechnen §. 43, 30.

Lehrsatz.

§. 45. Wenn man nach §. 43 verfähret, so findet man den wahren Quotienten.

Beweis.

Man setzet die einzele Ziffern des Quotienten iust in die Columnen, worinn die vorhabende Ziffern des Dividendi stehen; denn man fängt vornen an zu rechnen, und schreibet den Quotienten auch von vornen an, und die leere Stellen bezeichnet man mit Nullen §. 43. Folglich kommen die einzele Ziffern des Quoti an ihre rechte Stelle §. 9. Und man hat also zuletzt den wahren Quotienten. W. Z. E. W.

Anmerkungen.

§. 46. 1. Ist man einiger masen in dieser Art zu dividiren geübet, so braucht man nicht iust alle Zahlen bey der Subtraction zu unterschreiben.

2. In grosen Exempeln kan man sich viele Mühe durch ein Tarif ersparen. Nämlich: Man multipliciret die Einheitszahlen mit dem Divisor; so hat man alle Facta der einzelen Theile des Quotienten in den Divisor.

3. Die Probe der Division ist, daß man den Quotienten und Divisor multipliciret, so kommt das Dividendum zum Facit §. 40. Die Probe der Multiplication aber, daß man das Facit mit Einem von den Factoren dividiret, so kommt der andere Factor zum Quotienten §. 31.

4. Man hat noch viele andere Arten zu dividiren, davon s. Heberichs Anleitung zu den mathematischen Wissenschaften S. 47 u. f.

Grundsatz.

§. 47. Gleiche Dividenda und Divisores geben gleiche Quotienten.

Erklärungen.

§. 48. **Genannte Zahlen** (numeri in concreto) sind solche, bey denen zugleich benennt wird, von welcher Art der Dinge ihre Einheiten sind: Andere Zahlen sind **ungenannte** (numeri in abstracto). z. E. Drey Pferde, sechs Pfennige, acht Groschen, sind genannte Zahlen: Aber drey, sechs, acht, für sich, sind ungenannte. Verwandelt man die Einheiten einer gegebenen genannten Zahl in Einheiten einer anderen gegebenen genannten Zahl, so daß die Gröse der gezählten Dinge an sich selbst nicht verändert wird, so **bringt** man **die erste Zahl unter die Benennung der andern** (reducitur numerus in alterum). z. E. Ich habe 12 Batzen, und weiß, daß 4 Kreutzer Einen Batzen ausmachen: so kann ich 12 mit 4 multipliciren, und sagen 48 Kreutzer. Damit habe ich die Batzen unter die Benennung der Kreutzer gebracht, oder auf Kreutzer reduciret.

Aufgabe.

§. 49. Wie bringet man Eine gegebene genannte Zahl unter eine andere gegebene Benennung?

Auflösung.

Hier sind zwey Fälle möglich:

1. Sind die Einheiten der Zahl, welche unter andere Benennung gebracht werden soll, in sich gröser, als die Einheiten der andern gegebenen Zahl, so multipliciret man die erstere mit demienigen numero quoto, welcher anzeiget, wie viel iede Einheit der ersteren Zahl Einheiten der andern enthält.

2. Sind aber die Einheiten der Zahl, welche man unter andere Benennung bringen soll, in sich kleiner, als die Einheiten der andern gegebenen genannten Zahl, so dividiret man die erstere mit demienigen numero quoto, welcher anzeiget, wie viele Einheiten der ersteren Zahl, iede Einheit der letzteren begreifet.

Exempel.

1. Für den ersteren Fall. Es sollen 23 Gulden in Kreuzer verwandelt werden. Hier sind die einzelne Gulden, als die Einheiten der unter andere Benennung zu bringenden Zahl, an sich gröser, als die einzelne Kreuzer oder Einheiten der andern gegebenen genannten Zahl. Der numerus quotus, der mir anzeigt, wie viele Kreuzer ieder Gulden enthalte, ist 60. Daher wird 23 mit 60 multipliciret; und ich reducire dadurch 23. Gulden auf 1380 Kreuzer.

2. Für den zweyten Fall. Es sollen 1448 Kreuzer zu Reichsthalern gemacht werden. Hier sind die einzelne Kreuzer kleiner, als die einzelne Thaler. Der numerus quotus, der mir an-

zeiget, wie viele Kreuzer in einem Thaler enthalten sind, ist 90. Folglich wird die Zahl 1448 mit 90 dividiret; und dadurch kommen 1448 Kreutzer unter die Benennung von 16 Reichsthalern.

Beweis.

Auf diese Weise verwandelt man die Einheiten der Einen genannten Zahl, in Einheiten der andern genannten Zahl, und die Zahl in abstracto, oder die Grösse der gezählten Dinge wird in sich nicht verändert. Folglich hat man die Eine gegebene Zahl unter die Benennung der andern gebracht §. 48. U. D. W. Z. T.

Aufgabe.

§. 50. Wie rechnet man mit genannten Zahlen?

Auflösung.

1. Man bringe alle zusammen gehörende gegebene Zahlen, so viel möglich ist, unter die kleinste gegebene Benennung.

2. Alsdenn rechne man ordentlich, wie in andern Fällen.

3. Zuletzt stelle man, wo es nur angehet, die nöthigen Reductionen wieder an.

Exempel.

1. Im Addiren. Es sollen addiret werden fünf Gulden, 260 Kreuzer und 46 Heller. Hier sind die Heller die kleinste Benennung. Also macht man die 260 Kreuzer zu 1040 Hellern, und die fünf Gulden, durch 240 multipliciret, zu 1200 Hellern, nach nr. 1. Nun werden alle

Heller addiret, die Summe ist 2286. (nr. 2). Endlich reducirt man dies auf Gulden durch die Division mit 240, so kommt die Summe von 9 Gulden; und bleiben 126 Heller übrig. Diese werden mit 4 zu Kreuzern gemacht. So ist die Summe ganz, 9 Gulden, 31 Kreuzer, 2 Heller.

2. Im Subtrahiren. Es sollen subtrahiret werden 2 fl. 35 xr. 3 Hl. von 3 fl. 2 xr. 1 Hl. Hier werden beyde Zahlen besonders reduciret: die erste auf 623 Hl, die andere auf 729 Hl. Jene von dieser abgezogen läßt zum Rest 106 Hl. d. i. nach geschehener Reduction, 26 xr. 2 Hl.

Beweis.

Die Veränderung der Benennung lässet die Zahl in sich unverändert d. i. die Gröse der gezählten Dinge bleibet einerley §. 48. Man hat also weiter nichts zu thun, als, wie sonst, ordentlich zu rechnen; und so rechnet man recht mit genannten Zahlen. U. D. W. Z. E.

Anmerkung.

§. 51. Oft findet sichs, daß gar keine Reductionen nöthig sind: Und alsdenn gehet die Rechnung ordentlich fort. z. E. 5 Centner, 12 ℔. und 3 Loth, addiret mit 6 C. 18 ℔. und 7 Loth, giebt, ohne Reduction, in der Summe 11 Centner, 30 ℔. 10 Loth.

Anmerkung.

§. 52. Sind Reductionen nöthig, so kann man auch auf allerhand andere Arten rechnen:

doch ist die § 50. angegebene Art eine der deutlichsten und sichersten.

Erklärungen.

§. 53. Wenn eine Zahl gröser, oder kleiner ist, als die andere, so hat sie ein **Verhältniß** zu derselben (rationem mathematicam). Zwey im Verhältniß stehende Zahlen heisen die **Glieder des Verhältnisses** (termini rationis). Findet man dies Verhältniß durch die Subtraction, so ist es **arithmetisch**. Findet man es durch die Division, so ist es **geometrisch**. Die dritte Zahl, wodurch das Verhältniß genau angezeigt wird, heist der **Exponent**, oder **Name des Verhältnisses** (exponens, nomen rationis). z. E. 5 und 7 sind ungleiche Zahlen, also haben sie ein Verhältniß zu einander. Dieses suche ich entweder durch die Subtraction, und sage: 7 — 5 = 2; So ist das Verhältniß arithmetisch, und 2 ist der Exponent, 5 aber und 7 die Glieder des Verhältnisses. Oder ich suche das Verhältniß durch die Division, und sage 7 : 5 = 1 $\frac{2}{5}$; so ist das Verhältniß geometrisch, 1$\frac{2}{5}$ ist der Name, und 7 und 5 sind die Glieder des Verhältnisses.

Erklärungen.

§. 54. Wenn zwey sonst verschiedene Verhältnisse einerley Exponenten haben, so sind dergleichen **Verhältnisse** einander **ähnlich**. Zwey ähnliche Verhältnisse machen eine **Proportion**; und diese ist entweder **arithmetisch**, oder **geometrisch**, nachdem die Verhältnisse für

für sich arithmetisch oder geometrisch sind §. 53. Zahlen, die zu Einer Proportion gehören, sind **Proportionalzahlen** (Glieder der Proportion, termini proportionis). z. E. 6 : 3 ist so viel als 8 : 4, nämlich 2. Also sind diese beyde Verhältnisse ähnlich, und machen eine Proportion. Weil ich das Verhältniß durch die Division finde, so ist die Proportion geometrisch, und die Zahlen 6. 3. 8. 4. sind Proportionalzahlen.

Anmerkung.

§. 55. Eine arithmetische Proportion wird auf folgende Art geschrieben: 3 — 5 = 6 — 8 d. i. Drey verhält sich zu fünf, wie sechs zu acht. Die geometrische wird eben so ausgesprochen, aber folgendermassen geschrieben 3 : 12 = 5 : 20.

Erklärungen.

§. 56. Wenn das zweyte und dritte Glied einer Proportion einerley ist, so ist die **Proportion zusammenhängend** (proportio continua). Dieses mittlere Glied, welches zwey Stellen vertritt, heist die **mittlere Proportionalzahl** der beyden andern. Proportionen, die nicht zusammenhängen, sind **getrennet** (proportiones discretæ). z. E. 3 : 6 = 6 : 12 ist eine zusammenhängende Proportion; weil 6 zwey Stellen vertritt. Eben diese Zahl 6 ist die mittlere Proportionalzahl zwischen 3 und 12. Die Proportion 5 — 10 = 6 — 11 ist getrennet.

Grundsatz.

§. 57. Jede Proportion hat eigentlich vier Glieder.

Grundsätze.

§. 58. 1. Wenn zwey Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich.

2. Zahlen, die nach einerley Verhältniß wachsen, oder abnehmen, behalten immer einerley Verhältniß.

Lehrsatz.

§. 59. Wenn man zwey Zahlen mit einerley Multiplicator multipliciret, so verhalten sich die Facta zu einander, als wie die beyde Multiplicata.

Beweis.

Denn in diesem Falle nehmen zwey Zahlen nach einerley Verhältniß zu § 58.

Lehrsatz.

§. 60. Wenn zwey Zahlen mit einerley Divisor dividiret werden, so verhalten sich die Quotienten zu einander, als wie die Divisa.

Beweis.

Denn in diesem Falle nehmen zwey Zahlen nach einerley Verhältniß ab. §. 58.

Erklärung.

§. 61. Wenn man ein Ganzes in seine Theile genau eintheilet, und nimmt hernach Einen oder etliche von diesen Theilen, so heist die daraus entstehende Zahl ein **Bruch** (fractio, numerus fractus, minutia). z. E. Ein Gulden hat 60 Kreuzer. Ein Kreuzer ist also der sechzigste Theil eines Gulden. Sage ich fünf sech-

zigste Theil, oder Sechzigtheile, so ist dies ein Bruch.

Anmerkung.

§. 62. Ein Bruch wird wenigstens mit zwey Zahlen geschrieben, z. E. $\frac{1}{2}$ d. i. Ein Halbes, $\frac{2}{3}$ d. i. zwey Drittel.

Erklärungen.

§. 63. Von diesen (zwey) Zahlen (§. 62) zeiget die eine (untere) an, in wie viele Theile man das Ganze getheilet habe: und diese Zahl heiset der **Nenner** (nominator, nomen fractionis). Die andere (obere) Zahl aber zeigt an, wie viele Theile man just von den angezeigten Theilen des Ganzen nehme: und diese nennet man den **Zähler** (numerator). z. E. In $\frac{2}{4}$ zeiget 4 an, daß das Ganze hier in vier Theile getheilet werde, und 4 ist also der Nenner. Aber 2 zeiget an, daß hier von den vier Theilen des Ganzen nur zwey angenommen werden; also ist 2 der Zähler.

Erklärungen.

§. 64. Ist der Zähler kleiner, als der Nenner, so ist der **Bruch ächt** (wahr, fractio vera). Ist der Zähler gröser, als der Nenner, so ist der **Bruch unächt** (ein Bastarbruch, fractio spuria). z. E. $\frac{7}{8}$ ist ein ächter Bruch: Aber $\frac{5}{4}$ ist ein unächter, weil der Zähler gröser ist, als der Nenner.

Erklärungen.

§. 65. Brüche, die nur mit zwey Zahlen geschrieben werden (§. 62), nennt man einfache

Brüche (fractiones simplices). Setzet man aber zwey Brüche so zusammen, daß der Eine den Nenner des andern vorstellet, so hat man einen **doppelten**, oder **zusammengesetzten Bruch** (fractionem fractionis). Gehört zu einem Bruch noch eine ganze Zahl, so nennet man beyde zusammen, eine **gemischte Zahl** (numerum mixtum).

Anmerkung.

§. 66. Ein doppelter Bruch wird mit drey Zahlen geschrieben. z. E. $\frac{\frac{1}{2}}{3}$ d. i. Ein halbes Drittel. Eine gemischte Zahl wird geschrieben z. E. $6\frac{3}{10}$ d. i. Sechs (Ganze) und drey Zehentheile.

Grundsatz.

§. 67. Ein wahrer Bruch ist kleiner, als ein Ganzes. s. §. 61, 64.

Grundsatz.

§. 68. Eine gemischte Zahl ist gröser, als Ein Ganzes, und auch gröser, als ein wahrer Bruch. s. §. 65.

Grundsatz.

§. 69. Ein unächter Bruch ist gröser, als Ein Ganzes; und kann allemal entweder in eine gemischte, oder in eine ganze Zahl verwandelt werden. s. §. 64.

Lehrsatz.

§. 70. Wie sich der Zähler zum Nenner verhält, so verhält sich der Bruch zum Ganzen.

Beweis.

Beweis

Der Nenner zeiget die sämmtlichen Theile des Ganzen, der Zähler die vorhandenen an §. 61, 63. Folglich stellet der Nenner das Ganze, und der Zähler den Bruch vor. Folglich verhält sich der Zähler zum Nenner, wie der Bruch zum Ganzen. U. D. W. Z. E.

Lehrsatz.

§. 71. Je öfter der Zähler in dem Nenner enthalten ist, desto kleiner ist der Bruch.

Beweis.

Wie sich der Zähler zum Nenner verhält, so verhält sich der Bruch zum Ganzen §. 70. Ist nun der Zähler oft im Nenner enthalten, so ist auch der Bruch oft im Ganzen enthalten d. i. Er ist klein. Und ie öfter folglich der Zähler in dem Nenner enthalten ist, desto kleiner ist der Bruch. U. D. W. Z. E.

Lehrsatz.

§. 72. Wenn man den Zähler und Nenner eines gegebenen Bruches mit einerley Zahl multipliciret, oder dividiret, so sind die daraus entstehende neue Brüche dem ersten gegebenen Bruche gleich.

Beweis.

Zähler und Nenner haben ein gewisses Verhältniß zu einander §. 53. Nehmen sie, durch Multiplication oder Division, nach einerley Verhältniß zu oder ab, so behalten sie immer einerley Verhältniß zu einander §. 58. d. i. Die,

auf

auf solche Art, aus ihnen entstehende Facta und Quotienten bleiben immer in einerley Verhältniß gegen einander §. 59, 60. Behält der Zähler immer einerley Verhältniß gegen den Nenner, so behält auch der Bruch einerley Verhältniß gegen das Ganze §. 70. Folglich sind die also entstandene neue Brüche dem ersten gegebenen Bruche gleich. W. Z. E.

Erklärung.

§. 73. **Ein Bruch wird aufgehoben**, wenn man einen andern Bruch findet, der mit kleineren Zahlen geschrieben wird, und dem ersten gegebenen gleich ist. z. E. wenn man anstatt $\frac{35}{56}$ den Bruch $\frac{5}{8}$ findet.

Aufgabe.

§. 74. Wie wird ein gegebener Bruch aufgehoben?

Auflösung.

Man dividiret desselben Zähler und Nenner durch Eine Zahl, und schreibet die gefundenen Quotienten in einen neuen Bruch.

Exempel.

Man soll den Bruch $\frac{280}{448}$ aufheben: so dividiret man den Zähler 280 mit 8, und bekommt zum Quoto 35: Alsdenn dividiret man den Nenner 448 auch mit 8, so bekommt man heraus 56. Dies zusammengeschrieben macht den neuen Bruch $\frac{35}{56}$. Dividirt man hier mit 7 nochmals, so kommt der neue Bruch $\frac{5}{8}$. Und diese zwey Brüche $\frac{35}{56}$ und $\frac{5}{8}$ sind dem ersten $\frac{280}{448}$ gleich; denn in allen dreyen ist der Zähler $1\frac{3}{5}$ mal in dem Nenner enthalten.

Beweis.

Beweis.

Zähler und Nenner werden hier dividirt, und also in kleinere Zahlen verwandelt. Weil sie aber mit einerley Zahl dividirt werden, so bleiben sie dem ersten gegebenen Bruch gleich § 72. Folglich wird der gegebene Bruch aufgehoben §. 73.

Erfahrungssätze.

§. 75. Man hat durch viele angestellte Proben gefunden, daß folgende Sätze wahr, und bey Aufhebung der Brüche brauchbar sind:

1. Die Zahl 2 hebt alle Brüche auf, welche sich in Zähler und Nenner auf eine gerade Zahl, oder Nulle endigen.

2. Die Zahl 9 hebt alle Brüche, deren Zähler und Nenner sich zu lauter Neunen summiren lassen. z. E. Der Bruch $\frac{243}{981}$ kann im Zähler zu Einem 9 summiret werden; denn $2 + 4 + 3 = 9$. Der Nenner lässet sich zu zwey Neunen summiren; denn $9 + 8 + 1 = 18 = 9.2$. Folglich kann man durch neun diesen Bruch, in $\frac{27}{109}$ aufheben.

3. Die Zahl 3 hebt alle Brüche, die sich, in Zähler und Nenner, zu dreyen summiren lassen.

4. Die Zahl 5 hebt alle Brüche, die sich, in Zähler und Nenner, auf 5, oder auf 0 endigen.

Anmerkung.

§. 76. Die Auflösungen der Aufgabe: Wie findet man, ob sich ein gegebener Bruch aufheben lasse, oder nicht? ist gar zu weitläuftig und un=

unangenehm. Uebung ist das beste. s. davon Hederichs Anweisung zu den mathematischen Wissenschaften S. 102.

Grundsatz.

§. 77. Sind in einem Bruch Zähler und Nenner gleich, so ist er = 1. z. E. $\frac{3}{3}$ oder $\frac{5}{5}$ sind Ein Ganzes.

Aufgabe.

§. 78. Wie verwandelt man einen unächten Bruch in eine ganze oder gemischte Zahl?

Auflösung.

Man dividiret den Zähler mit dem Nenner, und schreibet den Quotienten, als die gesuchte ganze, oder gemischte Zahl, hin.

Exempel.

Es sollte der unächte Bruch $\frac{18}{4}$ in eine gemischte Zahl verwandelt werden, so dividiret man 18, den Zähler, mit 4, dem Nenner, und bekommt zum Quoto $4\frac{1}{2}$.

Beweis.

Der Nenner ist das Ganze §. 63. Sucht man nun, durch die Division, wie oft das Ganze in dem Zähler d. i. in den vorhandenen Theilen, enthalten sey, so hat man die ganze Zahl, die dem Bruch gleich ist; und bleibt noch ein Bruch übrig, so macht er, mit der gefundenen ganzen Zahl, die verlangte gemischte Zahl.

Grundsatz.

§. 79. Wenn man ein Ganzes in einen Bruch schreiben will, so macht man die ganze Zahl zum Zähler, und 1 zum Nenner. z. E. $3 = \frac{3}{1}$. $6 = \frac{6}{1}$.

Anmer-

Anmerkung.

§. 80. Ist die ganze Zahl selber 1, so schreibet man nicht $\frac{1}{1}$, sondern $\frac{3}{3}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{5}{5}$ u. d.

Aufgabe.

§. 81. Wie schreibet man eine gemischte Zahl in einen Bruch?

Auflösung.

1. Man multipliciret die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches.

2. Man addiret zu diesem entstehenden Facit den Zähler des Bruches.

3. Man schreibet diese Summe, als einen Zähler, über den anfangs gegebenen Nenner des bey der gemischten Zahl befindlichen Bruches.

Exempel.

Es sollte die gemischte Zahl $3\frac{2}{4}$ in einen Bruch geschrieben werden, so multipliciret man die ganze Zahl 3 mit dem Nenner des Bruches 4. Zu dem Facit 12 addiret man den Zähler des Bruches 2. Die Summe 14 schreibet man als einen Zähler über den erstgegebenen Nenner 4, so kommt der unächte Bruch $\frac{14}{4}$ heraus.

Beweis.

Auf diese Weise wird die ganze Zahl in die angegebene kleine Theile des Nenners getheilet. Addiret man die übrige dergleichen vorhandene Theile aus dem Zähler dazu, und setzet den ersten Nenner darunter, so hat man einen Bruch, der der ersten gegebenen gemischten Zahl gleich ist.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 82. Hat ein Bruch an Zähler und Nenner Nullen, und man streicht an beyden gleich viele Nullen weg, so bleibet der Bruch gleich gros. z. E. $\frac{10}{100}$ sind $\frac{1}{10}$.

Beweis.

Durch solche Wegstreichung gleich vieler Nullen an Zähler und Nenner, wird der Bruch in der That, durch die Division mit 10, oder 100 u. f. gehoben §. 73. Er bleibt also gleich gros §. 72.

Erklärung.

§. 83. **Brüche unter einerley Benennung bringen**, heist sie also verändern, daß sie einerley Nenner bekommen, und doch so gros wie vorher bleiben. z. E. $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ werden unter einerley Benennung gebracht, wenn ich die zwey Brüche dafür setze $\frac{9}{12}$ und $\frac{8}{12}$; denn diese sind eben so gros, als die erste, und haben einerley Nenner, nämlich 12.

Aufgabe.

§. 84. Wie bringet man zwey Brüche unter einerley Benennung?

Auflösung.

Man multipliciret ieden Bruch mit dem Nenner des andern.

Exempel.

Wenn man $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ unter einerley Benennung bringet, so multipliciret man erstlich den Zähler 3 im ersten Bruch mit 3 dem Nenner

des

des andern, dies machet 9. Alsdenn den ersten Nenner 4 mit dem zweyten Nenner 3, giebt 12. Daraus entstehet der neue Bruch $\frac{9}{12}$ Eben so multipliciret man den Zähler und Nenner des andern Bruches mit 4, dem Nenner des ersten, giebt $\frac{8}{12}$.

Beweis.

Auf diese Weise werden bey den Nennern der gegebenen Brüche einerley Factores multipliciret, also kommt auch einerley Factor, zum gemeinschaftlichen Nenner heraus §. 36. Auser diesem wächset auch der Zähler und Nenner in den gegebenen Brüchen nach einerley Verhältniß, folglich bleiben die Brüche gleich gros §. 72. Man hat also diese gegebene Brüche unter einerley Benennung gebracht.

Aufgabe.

§. 85. Wie bringet man drey oder mehr Brüche unter einerley Benennung?

Auflösung.

Man multipliciret iedes Bruches Zähler und Nenner durch das Factum aus den Nennern der übrigen.

Exempel.

Es sollten die Brüche $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{7}$ unter einerley Benennung gebracht werden, so ist das Factum aus den Nennern der beyden letzteren $5 \cdot 7 = 35$. Hiemit wird der Zähler und Nenner des ersten Bruches multiplicirt, giebt $\frac{70}{105}$. Das Facit aus den Nennern des ersten und dritten Bruchs, nämlich 21, wird der Multiplicator von dem Zähler

ler und Nenner des zweyten Bruches, dies giebt $\frac{84}{105}$. Endlich macht der letzte Multiplicator 15, als das Product aus den Nennern der beyden ersten Brüche, den dritten Bruch zu $\frac{20}{105}$.

Beweis.

Dieser ist vollkommen einerley mit dem Beweise §. 84.

Lehrsatz.

§. 86. Brüche von einerley Benennung verhalten sich zu einander, wie ihre Zähler. z. E. $\frac{3}{4}$ verhält sich zu $\frac{2}{4}$, wie 3 zu 2.

Beweis.

Haben sie einerley Benennung, so sind sie Theile Eines Ganzen § 61. Sie verhalten sich also zu einander, wie die Theile dieses Ganzen, d. i. wie ihre Zähler. §. 63.

Zusatz.

§ 87. Will man demnach wissen, wie sich Brüche zu einander verhalten, so bringe man sie unter einerley Benennung §. 84, 86 z. E. Man sollte das Verhältniß zwischen den Brüchen $\frac{6}{8}$ und $\frac{4}{7}$ finden, so bringet man sie unter einerley Benennung, bekommt dadurch die Brüche $\frac{42}{56}$ und $\frac{32}{56}$, und siehet also, daß sie sich zu einander verhalten, wie 42 zu 32; d. i. wenn man mit 2 dividiret, wie 21 zu 16. s. §. 60.

Aufgabe.

§. 88. Wie verwandelt man einen Bruch in ganze Grössen, die aber kleiner sind, als die ganze Grösen des Bruches?

Auflö ung.

1. Man multipliciret den Zähler des Bruches mit der Zahl, welche anzeiget, wie viele verlangte kleine Grösen oder Zahlen, in Einem Ganzen des Bruches enthalten sind.

2. Man dividiret dieses Factum mit dem Nenner des Bruches. Der Quotient enthält die verlangte kleinere Grösen.

Exempel.

Man sollte $\frac{6}{8}$ Gulden in Kreuzer verwandeln, so multipliciret man den Nenner des Bruches 6, mit 60; denn 60. zeiget an, wie viele Kreuzer in Einem Gulden enthalten sind. Das Facit ist 360. Dies wird mit dem Nenner des Bruches 8 dividiret. Und so enthalt der Quotient 45, die verlangte Kreuzer.

Beweis.

Wenn man den Zähler auf diese Weise multipliciret, so würde man so viele kleinere verlanate Grösen haben, als das Facit anzeiget; wenn nämlich der Zähler eine ganze Zahl wäre. Da er aber solches nicht ist, sondern nur die vorhandenen Theile, in Beziehung auf den unten stehenden Nenner, andeutet, so dividiret man mit demselben Nenner, und findet dadurch, wie viele Ganze Zahlen denn in dem oberen unächt gewordenen Zähler stecken. §. § 78.

Aufgabe.

§. 89. Wie addiret man Brüche zu Brüchen?

Auflösung.

Man bringet sie, wenn sie verschiedene Nen-

ner haben, unter einerley Benennung, addiret sodenn die Zähler, und setzet den gemeinschaftlichen Nenner unter das entstandene Facit der Zähler.

Exempel.

$\frac{2}{4}$ und $\frac{1}{4}$ sind = $\frac{3}{4}$. Und $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{3}$ sind = $\frac{3}{15}$ und $\frac{10}{15}$ §. 84. Folglich ist ihre Summe = $\frac{13}{15}$.

Beweis.

Ist an sich klar.

Aufgabe.

§. 96. Wie addiret man ganze Zahlen und Brüche zusammen?

Auflösung.

1. Man addiret die Brüche zusammen §. 89, und machet sie zu ganzen, oder gemischten Zahlen §. 78. wenn sie nämlich in der Summe einen unächten Bruch machen.
2. Man addiret die ganzen Zahlen.
3. Man summiret endlich alles.

Exempel.

Man sollte addiren 2, 6, und $\frac{3}{6}$ nebst $\frac{1}{6}$, so macht solches 8 $\frac{4}{6}$. Man sollte addiren 3 und 5 Ganze, ingleichen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$, so machte solches 8 $\frac{6}{8}$. Man sollte addiren 7 + 12 + $\frac{3}{4}$ + $\frac{5}{8}$, so machen die Brüche, die hier gegeben werden, wenn man sie unter einerley Benennung bringt und addiret, aus $\frac{44}{32}$ d. i. 1 $\frac{12}{32}$ oder 1 $\frac{3}{8}$. Die ganze Summe ist also 20$\frac{3}{8}$.

Beweis.

Ist an sich klar.

Auf-

Aufgabe.

§. 91. Wie addiret man Brüche und gemischte Zahlen?

Auflösung.

1. Man addiret die Brüche, und machet sie zu ganzen oder gemischten Zahlen § 90, 78.

2. Man addiret die ganze Zahlen, und summiret endlich.

Exempel.

Es sollten addiret werden $3\frac{2}{4} + \frac{6}{7}$, so addiret man die Brüche $\frac{2}{4}$ und $\frac{6}{7}$, dies macht $\frac{38}{28}$ § 89. Machet man sie zu einer gemischten Zahl, so hat man $1\frac{10}{28}$, oder $1\frac{10}{28}$ d. i. $1\frac{5}{14}$. Die ganze Summe ist also $= 4\frac{5}{14}$.

Aufgabe.

§. 92. Wie addiret man ganze Zahlen, gemischte Zahlen und Brüche?

Auflösung.

Ist einerley mit §§. 91, 92.

Exempel.

Es sollten addiret werden $8 + 22\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$, so addiret man die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ und bekommt zur Summe $1\frac{1}{2}$. Die Summe der ganzen Zahlen ist 28, folglich ist Summa Summarum $29\frac{1}{2}$.

Aufgabe.

§. 93. Wie subtrahiret man einen Bruch von dem andern?

Auflösung.

1. Man bringet, wo es nöthig ist, die Brüche unter einerley Benennung §. 84.

2. Man ziehet den Zähler des abzuziehenden Bruches von dem Zähler des andern ab.

Exempel.

Es sollten abgezogen werden $\frac{12}{17}$ von $\frac{19}{20}$, so bringet man beyde Bruche unter die Benennung $\frac{240}{340}$, $\frac{323}{340}$. Der Zähler des ersten wird von dem Zähler des letzteren abgezogen, so hat man zum Rest $\frac{83}{340}$.

Aufgabe.

§ 94. Wie subtrahiret man einen Bruch von einer ganzen Zahl?

Auflösung.

1. Man schreibet eine Einheit der ganzen Zahl in einen Bruch, der mit dem gegebenen einerley Nenner hat §. 80.

2. Man subtrahiret nach §. 93, und schreibet den Rest in eine ganze, oder gemischte Zahl.

Exempel.

Es sollen $\frac{2}{3}$ von 4 Ganzen subtrahiret werden, so schreibt man Ein Ganzes in den Bruch $\frac{3}{3}$, hievon $\frac{2}{3}$ abgezogen, giebt zum Rest die gemischte Zahl $3\frac{1}{3}$.

Aufgabe.

§ 95. Wie subtrahiret man einen Bruch von einer gemischten Zahl?

Auflösung.

1. Man verfähret nach §. 93, nr. 1, 2.

2. Gehet alsdenn keine Subtraction an, so verfähret man nach §. 94, nr. 1.

3. Man addiret diese in einem Bruch geschrie-

schriebene Einheit der gemischten Zahl zu dem Bruche der gemischten Zahl.

4. Man subtrahiret von dieser Summe den zuerst gegebenen Bruch.

Exempel.

Man sollte von $3\frac{1}{2}$ subtrahiren $\frac{3}{4}$, so bringet man $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ unter die Benennung $\frac{4}{8}$ und $\frac{6}{8}$. Nun können $\frac{6}{8}$ und $\frac{4}{8}$ nicht abgezogen werden: daher nimmt man 1 von der Zahl 3, und schreibet es in $\frac{8}{8}$. Diese $\frac{8}{8}$ zu $\frac{4}{8}$ addiret, machen $\frac{12}{8}$. Davon $\frac{6}{8}$ subtrahiret, giebt $\frac{6}{8}$ d. i. $\frac{3}{4}$. Der Rest ist also $2\frac{3}{4}$.

Aufgabe.

§. 96. Wie subtrahiret man eine gemischte Zahl von der andern?

Auflösung.

1. Man bringet die Brüche unter einerley Benennung, und subtrahiret, nach §. 93.

2. Gehet alsdenn keine Subtraction an, so schreibet man eine Einheit derienigen gegebenen Zahl, von welcher abgezogen werden soll, in einen Bruch, nach §. 80, und addiret solche zu dem schon vorhandenen Bruche seiner gemischten Zahl.

3. Man subtrahiret endlich die ganze Zahlen von den Ganzen, und die Brüche von den Brüchen.

Exempel.

Man sollte $2\frac{5}{8}$ subtrahiren von $4\frac{3}{4}$, so bringet man $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{8}$ unter die Benennung $\frac{16}{32}$ und $\frac{20}{32}$.

Hier gehet keine Subtraction an; daher wird 1 von der Zahl 4 in den Bruch $\frac{32}{32}$ geschrieben. Diese $\frac{32}{32}$ zu $\frac{16}{32}$ addiret, machen $\frac{48}{32}$. Hievon $\frac{20}{32}$ abgezogen, bleiben $\frac{28}{32}$ d. i. $\frac{7}{8}$. Endlich 2 von 3 macht 1. Der Rest ist demnach $1\frac{7}{8}$.

Aufgabe.

§. 97. Wie ziehet man eine gemischte Zahl von einer Ganzen ab?

Auflösung.

Man verfähret nach §. 94, nr. 1. und §. 96, nr. 3.

Exempel.

Man sollte $3\frac{5}{7}$ von 8 abziehen, so verwandelt man eine Einheit von 8, in den Bruch $\frac{7}{7}$. Man ziehet 3 von 7, und $\frac{5}{7}$ von $\frac{7}{7}$ ab, so hat man zum Reste $4\frac{2}{7}$.

Lehrsatz.

§. 98. Wenn ein Bruch durch einen anderen Bruch multipliciret wird, so wird das Factum kleiner, als ieder von den Factoren. z. E. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12}$ d. i. $\frac{1}{2}$.

Beweis.

Wenn man einen Bruch mit dem anderen multipliciren soll, so soll man nicht den Einen Factor so oft geben, als der Zähler und Nenner des andern Factoris Einheiten haben; sonst würde man ihn nicht mit einem Bruche, sondern mit zwey ganzen Zahlen multipliciren. Vielmehr soll man ihn in so viele Theile zerlegen, als des Anderen Nenner andeutet, und denn soll man davon so viele Theile nehmen, als der

Zähler

Zähler des Multiplicators andeutet. Folglich muß immer im Facto weniger kommen, als Einer von den Factoren ausmachet. z. E. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ heist nicht drey Viertheile mit zwey und mit drey multipliciren, sondern es heiset von drey Vierteln zwey Drittel nehmen.

Aufgabe.

§. 99. Wie multipliciret man einen Bruch durch den andern?

Auflösung.

1. Man nimmt einen Bruch zum Multiplicando, den anderen zum Multiplicator an.

2. Man multipliciret des Multiplicandi Zähler und Nenner mit des Multiplicators Nenner; und machet also dadurch einen Bruch, der dem Multiplicando völlig gleich ist §. 72.

3. Man dividiret dieses neuen Bruches Zähler mit dem Nenner des Multiplicators.

4. Man multipliciret diesen entstandenen Quotienten mit dem Zähler des Multiplicators.

5. Man schreibet dieses letzte Facit, als einen Zähler, über den durch nr. 2. entstandenen Nenner.

Exempel.

Es sollten multipliciret werden $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$, so nimmt man $\frac{2}{3}$ zum Multiplicator, und $\frac{4}{5}$ zum Multiplicando an (nr. 1). Man multipliciret Zähler und Nenner in $\frac{4}{5}$ mit dem Nenner des Multiplicators $3 = \frac{12}{15}$ (nr. 2). Den hier entstandenen Zähler 12 dividiret man mit des Multiplicators Nenner, nämlich $3, = 4$ (nr. 3).

Dieses Quotum 4 mit dem Zähler des Multiplicators 2 multipliciret, ist 8 (nr. 4). Endlich zu dem gefundenen Nenner 15 geschrieben, ist $\frac{8}{15}$ (nr. 5).

Beweis.

Durch die erste Multiplication des ganzen Multiplicandi mit dem Nenner des Multiplicators wird weiter nichts gethan, als man bringt das Multiplicandum unter eine solche Benennung, daß man seinen Zähler nachher mit dem Nenner des Multiplicators theilen kann, ohne daß dadurch das Verhältniß des Bruches verändert wird. s. §. 98. Bew. Hierauf betrachtet man den Zähler des Multiplicandi als ein Ganzes. Man theilet ihn mit dem Nenner des Multiplicators in die erforderten Theile. Man nimmt, durch die folgende Division, von diesen so viele, als der Zähler des Multiplicators anzeiget. Setzet man endlich seinen vorher gefundenen Nenner darunter, so hat man den Einen Bruch so vielmal genommen, als der andere erfordert. z. E. Hier sind $\frac{4}{5}$ zwey drittelmal genommen worden. Man hat also beyde multipliciret §. 98.

Folgerung.

§. 100. Weil hier der Zähler des Multiplicandi erstlich mit dem Nenner des Multiplicators multipliciret §. 99, nr. 2. und hernach auch wieder damit dividiret wird §. 99, 3, folglich gleich groß bleibet; so bedienet man sich besser der Kürze also, daß man blos die Zähler der

bey-

beyden Brüche, und hernach auch ihre Nenner durch einander multipliciret. z. E. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, denn $2 \cdot 4 = 8$, und $3 \cdot 5 = 15$. So ist $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{18}{28}$. Die weitläuftige Art §. 99 dienet nur die Möglichkeit einzusehen.

Aufgabe.

§. 101. Wie verwandelt man einen zusammengesetzten Bruch in einen einfachen?

Auflösung.

Man multipliciret die beyde untere Zahlen, und schreibet die dritte oberste, als den Zähler, über das Factum.

Exempel.

Man sollte den doppelten Bruch $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ in einen einfachen verwandeln, so multipliciret man 2 mit $4 = 8$, und schreibet 1 drüber, $= \frac{1}{8}$.

Beweis.

Bey einem zusammengesetzten Bruche ist zwischen der zweyten und dritten Zahl allemal 1 ausgelassen. z. E. $\frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{2}$ von $\frac{1}{4}$. d. i. $\frac{1}{2}$ multipliciret mit $\frac{1}{4}$ §. 98. Man brauchet also nichts weiter zu thun, als nach §. 100 zu multipliciren. Weil aber 1 nicht multipliciren kann, so brauchet man nur in dem zusammengesetzten Bruche die beyde untern Zahlen zu multipliciren, und die oberste Zahl drüber zu schreiben.

Aufgabe.

§. 102. Wie multipliciret man Brüche mit ganzen oder gemischten Zahlen, gemischte Zahlen

len aber mit andern gemischten, oder mit ganzen Zahlen?

Auflösung.

Man setzet die ganze und gemischte Zahlen in Brüche über, nach §. 79, 81. und multipliciret, nach §. 100.

Exempel.

1. Mit ganzen Zahlen. Es sollten multipliciret werden 6 mit $\frac{5}{8}$, so schreibet man 6 in den Bruch $\frac{6}{1}$, und multipliciret nach §. 100, so hat man $\frac{30}{8}$. d. i. $3\frac{3}{4}$.

2. Mit gemischten Zahlen. Man sollte multipliciren $\frac{3}{4}$ mit $2\frac{1}{2}$, so schreibet man $2\frac{1}{2}$ in den Bruch $\frac{5}{2}$. Dies multipliciret mit $\frac{3}{4} = \frac{15}{8}$ d. i. $1\frac{7}{8}$.

Anmerkung.

§. 103. Hier kann in dem Facto zuweilen mehr heraus kommen, als Ein Factor ausmachet; weil man nicht mit blosen Brüchen multipliciret §. 98.

Aufgabe.

§. 104. Wie dividiret man einen Bruch mit dem andern?

Auflösung.

Man bringet beyde unter einerley Benennung, und dividiret des Dividendi Zähler mit des Divisors Zähler.

Exempel.

Es sollten $\frac{2}{3}$ mit $\frac{1}{4}$ dividiret werden, so bringet

get man beyde Brüche unter die Benennung $\frac{8}{12}$ und $\frac{3}{12}$. Man dividiret 8 mit 12, und bekommt $2\frac{2}{3}$ zum Quotienten.

Beweis.

Brüche von einerley Benennung verhalten sich zu einander, wie ihre Zähler §. 86. Man brauchet also nur mit den Zählern zu rechnen.

Zusatz.

§. 105. Zu der Division der Brüche brauchet man nur die Zähler §. 104. Bew. Bringet man aber zwey Brüche unter einerley Benennung, so entstehet der Zähler des ersteren durch die Multiplication mit dem Nenner des anderen, und der Zähler des anderen, durch die Multiplication mit dem Nenner des ersteren §. 84. Wenn man also bey der Division der Brüche den Divisor umkehret, daß sein Nenner oben und sein Zähler unten hin zu stehen kommt, und multipliciret alsdenn, wie § 100; so wird der Zähler des ersteren Bruches mit dem Nenner des anderen, und der Zähler des anderen mit dem Nenner des ersteren multipliciret, und man bekommt dadurch die beyde Zähler, die mit einander dividiret werden sollen. z. E. In $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$, wird $\frac{1}{4}$ geschrieben $\frac{4}{1}$. Nun aber ist $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Anmerkung.

§. 106. Man darf sich nicht befremden lassen, wenn es scheinet, als käme durch die Division der Brüche zu viel in dem Quotienten

her-

heraus, z. E. $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$. Denn es soll dies nicht so viel heisen: Wenn man ein Halbes mit einem Viertheil dividirt, so hat man zwey Ganze; sondern: In einem Halben befindet sich ein Viertheil zweymal.

Aufgabe.

§. 107. Wie dividiret man ganze Zahlen mit Brůchen oder gemischten Zahlen; Brůche mit ganzen oder gemischten Zahlen; und gemischte Zahlen mit Brůchen, mit ganzen oder gemischten Zahlen?

Auflösung.

Man verwandelt die ganze und vermischte Zahlen in Brůche, und verfähret nach §. 105.

Exempel.

Man sollte $3\frac{1}{2}$ dividiren mit $\frac{2}{3}$, so verwandelt man $3\frac{1}{2}$ in $\frac{7}{2}$. Alsdenn kommt nach §. 105. diese Rechnung $\frac{7}{2} : \frac{2}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.

Anmerkung.

§. 108. Soll man in solchen Fällen eine kleinere Zahl durch eine grösere dividiren, so heist dieses so viel: Man soll suchen, den wie vielsten Theil der gröseren Zahl die kleinere ausmache? Daher kann auch im Quotienten weniger kommen, als in Einer der gegebenen Zahlen. z. E. $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} : \frac{2}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ d. i. Drey Viertheile Eines Ganzen sind drey Achttheile von zwey Ganzen.

Erklä-

Erklärungen.

§. 109. Wenn man eine Zahl durch sich selbst multipliciret, so nennet man das daraus entstehende Product das **Quadrat** derselben Zahl (eine Quadratzahl, numerum quadratum). z. E. 6 · 6 = 36; hier ist 36 das Quadrat von 6. Die durch sich selbst zu multiplicirende Zahl heiset, im Verhältniß auf ihr Quadrat, desselben **Quadratwurzel** (radix quadrata). z. E. 6 ist die Quadratwurzel von 36. Wenn eine Quadratwurzel aus zwey Ziffern bestehet, so ist sie **binomisch**; bestehet sie aus drey Ziffern, so ist sie **trinomisch** u. s. f. z. E. 12 ist eine binomische Quadratwurzel von 144; und 100 ist eine trinomische Quadratwurzel von 10,000. Einer Zahl Quadrat machen, heist sie **quadriren**.

Anmerkung.

§. 110. Zu den Quadratrechnungen und Cubicrechnungen brauchet man folgendes Täflein:

Radices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrata.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Er-

Erklärung.

§. 111. **Die Quadratwurzel** aus einer gegebenen Zahl **ausziehen** heiset diejenige Zahl finden, welche durch sich selber multipliciret, der gegebenen Zahl gleich ist. z. E. Es wird gegeben 144, und man findet, durch Rechnung, die Zahl 12, welche mit sich selbst multipliciret, 144 machet, so hat man die Quadratwurzel von 144 ausgezogen.

Aufgabe.

§. 112. Wie ziehet man die Wurzel aus einer gegebenen Quadratzahl?

Auflösung.

Man dividiret, aber auf folgende ganz besondere Art:

1. Man punctiret die Quadratzahl unten so, daß eine Ziffer punctiret wird, und die andere unpunctiret bleibet. Dies dienet die Zahl der Theile der Wurzel zu wissen.

2. Man ziehet zwey Linien unter dem punctirten Quadrate; um den Quotienten hineinzusetzen.

3. Der Divisor des ersten und vordersten Theiles im Quadrate ist dasjenige Quadrat aus dem Täflein §. 110, das ihm am nächsten kommt, aber doch nicht gröser ist. Die Wurzel hievon §. 110 ist die erste Ziffer des Quotienten; d. i. der Wurzel.

4. Der Divisor der folgenden Theile der Quadratzahl ist der ganze schon gefundene Quo-

Quotient, oder Theil der Wurzel doppelt genommen.

5. Die zur Division erforderte Subtraction vom Dividendo geschiehet

a. Bey dem ersten Theile des Quadrates so, daß blos der nach nr. 3. gefundene Divisor davon abgezogen wird.

b. Bey den andern Theilen aber so, daß man

α. Die letzte Zahl des Quotienten hinter den letzten Divisor, als eine Einheitszahl, schreibet,

β. Diese Summe mit eben dieser letzten Zahl des Quotienten multipliciret,

γ. Und das daraus kommende Facit oben von der gegebenen Quadratzahl abziehet.

Exempel.

Es sollte die Quadratwurzel von der Zahl 484 ausgezogen werden, so schreibet und rechnet man folgender massen:

4	8	4
2		2
4	:	:
	4	2
		2
	8	4

Nämlich: Man punctiret die Zahl 484 nach nr. 1. Und siehet daraus, daß die Wurzel bino-

misch ist. Hierunter ziehet man die beyde Querlinien (nr. 2). Zum Divisor der ersten Zahl nimmt man aus dem Täflein §. 110 das Quadrat 4, weil es der oberen Zahl am nächsten kommt. Die Wurzel davon 2, ist der erste Theil der gesuchten Quadratwurzel, und kommt zwischen die beyde Querstriche (nr. 3, 2). Alsdenn ziehet man 4 von 4 ab (nr. 5, a); So bleibt oben 84 übrig Zum Divisor dieses folgenden Theiles der Quadratzahl, nimmt man den schon gefundenen Quotienten 2 doppelt = 4. (nr. 4.), der ist in 8 zweymal enthalten. Diese 2 werden oben unter den zweyten Punkt geschrieben. Alsdenn schreibet man diese 2 neben den letzten Divisor 4, als einen numerum monadicum (nr. 5, b α), multipliciret die Summe 42 durch eben diese Zahl 2 = 84 (nr. 5, b, β), und ziehet endlich 84 von der oberen Zahl ab, so ist 22 die gesuchte Quadratwurzel.

Zusatz.

§. 113. Wenn alles aufgehet, und oben am Ende noch unberechnete Nullen übrig sind, so setzet man in den Quotienten noch so viele Nullen, als oben punctirte, und noch nicht berechnete Nullen übrig sind. z. E.

~~9~~	~~6~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
·		·		·		·
3		1		0		0
~~9~~	:	:	:	:	:	:
	~~6~~	1	:	:	:	:
		1	:	:	:	:
	~~6~~	~~1~~	:	:	:	:

Anmer-

Anmerkung.

§. 114. Der Beweis der Auflösung § 112 ist für Anfänger zu schwer und zu weitläuftig. Man muß sich also anfangs mit der blosen Erfahrung begnügen; zumahl da **Wolf** und **Vlacq** in ihren tabulis sinuum & tangentium die gewöhnlichste Quadrate und Cubos berechnet haben.

Erklärungen.

§. 115. Wenn man eine Zahl durch ihr Quadrat multipliciret, so heist das daraus entstehende Factum der **Cubus** derselben Zahl (eine Cubiczahl). z. E. 8 durch sein Quadrat 64 multipliciret, giebt den Cubum 512. Die Zahl, welche also multipliciret worden, heist, im Verhältniß auf den Cubus, die **Cubicwurzel** (radix cubica), und ist **binomisch, trinomisch** u. s. w. Einer Zahl Cubum machen, heist dieselbe **cubiren**.

Erklärung.

§. 116. **Die Cubicwurzel aus** einer gegebenen Zahl **ziehen**, heist diejenige Zahl finden, welche der gegebenen Zahl gleich wird, wenn man sie mit ihrem eigenen Quadrate multipliciret.

Aufgabe.

§. 177. Wie ziehet man die Wurzel aus einer gegebenen Cubiczahl?

Auflösung.

Man dividiret, aber auf folgende ganz besondere Art:

1. Man punctiret die Cubiczahl, wie §. 112 das Quadrat; doch so, daß immer zwey Zahlen unpunctiret bleiben.

2. Man ziehet darunter die beyde Striche zum Quotienten, und setzet neben bey die Rechnung drey lateinische Buchstaben a.) b.) c.) unter einander.

3. Der Divisor des ersten Theiles im Cubus ist derienige Cubus aus dem Täflein §. 110, der ihm am nächsten kommt, aber nicht grösser ist. Die Wurzel davon ist der erste Theil des Quotienten, d. i. der Cubicwurzel oben.

4. Der Divisor der folgenden Theile der Cubiczahl ist das Quadrat des ganzen schon gefundenen Quotienten dreymal genommen.

5. Die zur Division erforderte Subtraction geschiehet

A. Bey dem ersten Theil des Cubus so, daß blos der nr. 3. gefundene Divisor abgezogen wird.

B. Bey den andern Theilen des Cubi aber verfähret man also:

a. Man multipliciret den iedesmaligen Divisor mit der letzten Zahl des Quotienten oben, und schreibet das Factum neben der Rechnung bey a). s. nr. 2.

b. Man multipliciret das Quadrat der letzten Zahl in dem Quotienten oben mit dem Triplo der vorhergehenden Zahlen des Quotien-

tienten, und setzet das Factum bey b).

c. Man cubiret die letzte Zahl des Quotienten, und setzet den Cubum bey c).

d. Man schreibet diese dreyerley Facta so in die Rechnung zur Subtraction, daß die Einheiten von c) unter die nächstfolgende, noch unberechnete, punctirte Zahl oben; die Einheiten von b) Eine Stelle weiter hervor; und die von a) noch Eine Stelle weiter hervor kommen.

e. Endlich summiret man diese drey Facta zusammen, und subtrahiret sie von den oben drüber stehenden Zahlen des Cubus.

Exempel.

```
1   1
1   9   6   8   3          a) 84.
    .           .          b) 294.
--------------------       c) 343.
    2           7          z. lit. a).
--------------------       Div. 12
:   8   :   :   :                 7
--------------------            ----
:   1   2   :   :                 84
-   -   -   -   -          z. lit. b).
:   :   3   4   3          7·7 = 49; 49·6 = 294.
:   2   9   4   :          z. lit. c).
:   8   4   :   :          7·7 = 49; 49·7 = 343.
1   1   6   8   3
```

Nämlich man sollte die Cubicwurzel aus der Zahl 19,683 ausziehen, so punctiret man hier 3 und 9 (nr. 1). Man ziehet die Querstriche, und setzet neben die Buchstaben a.) b.) c.) hin (nr. 2). Man schreibet, aus dem Täflein §. 110, 8 zum ersten Divisor, und 2, als den ersten Theil der Wurzel, an ihre Stellen (nr. 3). Man subtrahiret 8, als den ersten Divisor, oben von 19, bleiben 11 (nr. 5, A). Man quadriret den schon gefundenen Quotienten 2 = 4; und nimmt dies Quadrat 4 dreymal, ist = 12. Dies 12 ist der Divisor zum folgenden Theile des Cubi (nr. 4). Man dividiret 1 in 11 und nimmt es siebenmal. Diese 7 kommen oben hin (nr. 2). Man multipliciret den vorhabenden Divisor 12 mit der letzten Zahl des Quotienten 7, macht 84; diese schreibt man bey a) (nr. 5, B, a). Man quadriret die letzte Zahl des Quotienten 7, macht 49. Man tripliret die vorhergehende Zahl 2, = 6. Mit diesem Triplo 6 multipliciret man das Quadrat 49 = 294. Diese 294 setzet man bey b). (nr. 5, B, b). Man cubiret die letzte Zahl des Quotienten 7, = 343, und schreibet den Cubum 343 bey c). (nr. 5, B, c). Man schreibet diese 343 in die Rechnung, daß die letzte Ziffer 3 unter die oben punctirte 3 kommet; die 294 schreibet man mit ihrer letz-

letzten Ziffer 4 unter die oben stehende 8; und die 84 setzet man noch Eine Stelle weiter hervor (nr. 5, B, d). Endlich summiret man diese also gesetzten Facta, und subtrahiret ihre Summe von der gegebenen Cubiczahl; so ist 27 die gesuchte Cubicwurzel.

Anmerkung.

§. 118. Man muß sich hier bey der zweyten oder dritten Division gar wohl in Acht nehmen, daß man nicht den Divisor zu oft aus dem Dividendo nehme. Uebrigens gelten die §. §. 113, 114 hier eben so wie bey der Quadratrechnung.

Zusatz.

§. 119. Wenn die gegebene Quadrate und Cubi Irrationalgrösen sind, d. i. wenn sie nicht gerade durch die Quadratrechnung oder Cubicrechnung aufgehen, so setzet man bey den Quadratrechnungen zum oben bleibenden Reste zwey Nullen, und bey den Cubicrechnungen drey Nullen hinten zu, und rechnet ordentlich fort, so findet man Zehntheile der Wurzel. Thut man solches noch einmal, so findet man Hunderttheile u. s. w.

Exempel.

		2	6	
2	3	3.	7.	4
6	8	8	0	0
2		5		6
4	:	:	:	:
	4	5	:	:
		5	:	:
2	2	5	:	:
	2	5	0	6
	2	5	:	6
	8	0	3	6

Hier ist die Quadratwurzel $25\frac{6}{10}$ und bleibt noch irrational.

Anmerkung.

§. 120. Multipliciret man den gefundenen Quotienten mit sich selbst, und setzet das, was bey den Irrationalgrösen §. 119 übrig bleibet, nachher in der Summirung hinzu, so kommt die gegebene Quadratzahl wieder §. 109. Multipliciret man das Quadrat noch einmal durch den gefundenen Quotienten, und setzt das §. 119 übrig gebliebene hinzu, so kommt die gegebene Cubiczahl wieder §. 115. Diese sind die Proben der Quadratrechnungen und Cubicrechnungen.

Lehrsatz.

§. 121. In einer geometrischen Proportion entstehet das zweyte Glied durch die Multipli-

cation des ersten Gliedes mit dem Exponenten; und das vierte Glied entstehet aus der Multiplication des dritten Gliedes mit dem Exponenten. z. E. In der Proportion 5 : 20 = 4 : 16 ist der Exponent 4 §. 53. Multipliciret man nun das erste Glied 5 mit dem Exponenten 4, so hat man das zweyte Glied 20 zum Facit; und multipliciret man das dritte Glied 4 mit dem Exponenten 4, so hat man 16, als das vierte Glied.

Beweis.

Der Exponent ist der Quotient, welcher andeutet, wie oft das erste Glied in dem zweyten, und das dritte Glied in dem vierten enthalten sey §. 53. Folglich kann das erste Glied als Divisor des zweyten, und das dritte als Divisor des vierten Gliedes angesehen werden. §. 40. Multipliciret man aber den Divisor mit dem Quotienten, so kommt das Dividendum zum Facit §. 46, nr. 3. Folglich ist das zweyte Glied, als Dividendum des ersten, gleich dem Product aus dem ersten Glied in den Exponenten; und das vierte Glied ist gleich dem Facto aus dem dritten Glied in den Exponenten, d. i. das zweyte Glied entstehet durch die Multiplication des ersten Gliedes mit dem Exponenten; und das vierte entstehet aus der Multiplication des dritten mit dem Exponenten. W. Z. E.

Lehrsatz.

§. 122. Wenn man in einer geometrischen Proportion das erste Glied mit dem vierten,

 und

und das zweyte mit dem dritten multipliciret, so bekommt man gleiche Facta. z. E. 3 : 6 = 7 : 14. Hier ist 3 · 14 = 42, und 6 · 7 = 42.

Beweis.

Das Product aus dem ersten Gliede in das vierte entstehet aus dem ersten Gliede, aus dem Exponenten und aus dem dritten Gliede §. 121. Das Product aus dem zweyten Gliede in das dritte entstehet gleichfalls aus dem ersten Gliede, aus dem Exponenten und aus dem dritten Gliede §. 121. Gleiche Factores geben gleiche Facta §. 36. Folglich müssen diese beyde Producte einander gleich seyn.

Folgerung.

§. 123. In einer zusammenhängenden geometrischen Proportion ist also das Quadrat des mittleren Gliedes dem Producte der beyden äusersten gleich §. 56. z. E. 3 : 6 = 6 : 12. Hier ist 3 . 12 = 36 und 6 . 6 = 36.

Aufgabe.

§. 124. Wie findet man zwischen zwey gegebenen Zahlen einer zusammenhängenden geometrischen Proportion die mittlere Proportionalzahl?

Auflösung.

Man multipliciret die beyde gegebene Zahlen, und ziehet aus ihrem Facto die Quadratwurzel.

Exempel.

Man sollte zwischen den Zahlen 15 und 135 die mittlere Proportionalzahl finden, so multipliciret man 135 mit 15, = 2025. Hieraus ziehet man die Quadratwurzel 45; diese ist die verlangte mittlere Proportionalzahl.

Beweis.

Das Product der beyden gegebenen äusersten Zahlen ist dem Quadrate der mittleren Proportionalzahl gleich §. 123. Ziehet man also aus diesem Producte die Quadratwurzel, so muß solche die verlangte mittlere Proportionalzahl seyn §. 56.

Grundsatz.

§. 125. Wenn vier Zahlen proportional sind, so verhält sich die dritte zu der vierten, wie die erste zu der zweyten. s. §. 53, 54.

Aufgabe.

§. 126. Wie findet man zu den beyden ersten gegebenen Zahlen einer zusammenhängenden Proportion die dritte?

Auflösung.

1. Man quadriret die zweyte gegebene Proportionalzahl.

2. Man dividiret dieses Quadrat mit der ersten gegebenen Zahl.

Exempel.

Man sollte zu den beyden Zahlen 6 und 30, die dritte Proportionalzahl finden, so quadriret man

man 30, = 900. Dies mit 6 dividiret, giebt zur dritten Proportionalzahl 150 im Quotienten.

Beweis.

Das Quadrat des mittleren, oder zweyten Gliedes in einer zusammenhängenden Proportion ist dem Producte der beyden äusersten Glieder gleich §. 123. Dividiret man demnach dieses Product mit dem ersten Gliede, so muß das dritte zum Quotienten kommen §. 46, nr. 3.

Aufgabe.

§. 127. Wie findet man zu drey gegebenen Zahlen einer geometrischen Proportion die vierte Proportionalzahl?

Auflösung.

Man multipliciret das zweyte Glied mit dem dritten, und dividiret das Factum mit der ersten.

Exempel.

Es sollte zu 7 : 21 = 25 : die vierte Proportionalzahl gefunden werden, so multipliciret man 21 mit 25, und dividiret das Product mit 7, folgendermasen:

7 : 21 = 25 : 75

	3		21
7	525	75	25
			50
			525

Beweis.

Beweis.

Das Facit aus den zwey mittelsten Gliedern in einer geometrischen Proportion ist dem Producte aus dem ersten in das vierte gleich §. 122. Dividiret man also dasselbe mit dem ersten Gliede, so kommt das vierte zum Quotienten §. 46, nr. 3.

Erklärung.

§. 128. Die Auflösungen der Aufgaben §. 126, 127 nennet man die **Regel de Tri.**

Anmerkung.

§. 129. Die Regel de Tri lässet sich nirgends anbringen, als bey Dingen, die wirklich in geometrischer Proportion stehen. z. E. 3 ℔ kosten 12 fl, wie viel kosten 8 ℔? läßt sich durch die Regel de Tri beantworten. Aber die Frage: In Einer Minute laufen aus einer Oeffnung eines vollen Fasses 6 Maase, wie viele Maase laufen in 30 Minuten heraus? läßt sich nicht durch Anwendung der Regel de Tri beantworten.

Heischesatz.

§. 130. Die Proportionalzahlen müssen in der Rechnung just so angesetzet werden, wie es ihr wechselweises Verhältniß erfordert.

Zusatz.

§. 131. Um dieses zu beobachten, richtet man sich nach folgenden Regeln:

1. Man

1. Man setzet die gleichnamige Zahlen in Ein Verhältniß zusammen.

2. Man giebt Acht, ob die vierte Zahl grö-ser oder kleiner, als ihre gleichnamige seyn soll?

3. Soll sie gröser seyn, so setzet man auch in dem ersteren Verhältniß die grösere Zahl hinten hin.

4. Soll sie kleiner seyn, so setzet man auch in dem ersteren Verhältniß die kleinere Zahl hinten hin.

Exempel.

Man wollte wissen: Wie viel Centner Metall man für 120 fl. bekäme, wenn drey Centner 15 fl. kosten, so kommen die Gulden hier zusammen (nr. 1). Hier siehet man nun, daß die vierte gesuchte Zahl gröser seyn müsse als die dritte, nämlich 3 C.; weil eine weit grösere Summe Gulden damit in Verhältniß stehet (nr. 2). Folglich setzet man die Frage also an:

15 fl : 120 fl = 3 C : ? F. 24 C.

Erklärungen.

§. 132. Stehen in einem Exempel zu der Regel de Tri die Zahlen in rechter Proportion, so heist man die Auflösung die **ordentliche Regel de Tri** (*regulam de Tri directam*). Stehen sie aber so, daß sich das vierte Glied zum andern verhält, wie das erste zum dritten, so nennet man die Auflösung die **verkehrte Regel de Tri** (*regulam de Tri inuersam, conuersam*).

z. E.

z. E. 400 : 6 = 600 : 4 muß, wenn es heisen soll 400 Mann bringen über einem Werke 6 Wochen zu, und 600 Mann 4 Wochen, nach der verkehrten Regel gerechnet werden.

Aufgabe.

§. 133. Wie löset man ein Exempel von der verkehrten Regel de Tri auf?

Auflösung.

Man verwandelt es in ein Exempel nach der ordentlichen Regel, nach §. 131; und rechnet nach §. 127.

Oder.

Man multipliciret das erste und zweyte Glied, und dividiret mit dem dritten das Factum.

Exempel.

Dreysig Arbeiter verrichten etwas in acht Tagen, in wie viel Tagen sind achtzig Arbeiter fertig, wenn sie alle gleich stark arbeiten? Dies kann man nach §. 131 so rechnen:

A. A.
80 : 30 = 8 : 3.

Oder man rechnet also verkehrt:

A. T.
30 : 8 = 80 : 3
8
———
240 8 | 0 | 24 | 0 | 3

Beweis.

Die erste Art ist aus §. 126, 127 klar. Die andere Art gründet sich darauf, daß in der ver-

verkehrten Regel de Tri das erste Glied an dem dritten Orte stehet §. 132.

Erklärungen.

§. 134. Enthält die Aufgabe lauter einzelne Zahlen, so heiset die Auflösung die **einfache Regel de Tri** (regula de Tri simplex). z. E. 50 ℔ kosten 30 Thlr. wie viel kosten 18 ℔? Befinden sich aber bey den Hauptzahlen der Proportion noch Nebenzahlen, so wird die Regel **zusammengesetzt** (regula de Tri composita). z. E. 100 fl. bringen in 2 Jahren 8 fl. Interesse, wie viel Interesse bringen 150 fl. in 5. Jahren.

Aufgabe.

§. 135. Worinn bestehet die zusammengesetzte Regel de Tri, oder wie rechnet man darnach?

Auflösung.

Man multipliciret die Hauptzahlen mit den Nebenzahlen, und rechnet nach §. 127.

Exempel.

Drey Weber machen, in sechs Tagen, 50 Ehlen Zeug, wie viel machen 10 Weber in fünf Tagen? Dies wird so gerechnet:

W. T. Z. W. Z.
$3 \cdot 6 : 50 = 10 \cdot 5 : 138\frac{8}{9}$

18 | 50
50
50
2500

18 | 2500 | $138\frac{16}{18}$

Beweis.

Beweis.

Hier werden in der That allemal zwey oder mehrere Factores, statt Eines, gegeben. Will man nun mit solchen Rechnung anstellen, so muß man sie zu Einer Zahl machen; und dies geschiehet durch die Multiplication. Es ist einerley, ob ich sage: in zwey Tagen thun sechs dies, oder in Einem Tage thun 12 das nehmliche.

Heischesatz.

§. 136. So viele Fragen in der Aufgabe enthalten sind, so viele Auflösungen muß man auch vornehmen.

Folgerung.

§. 137. Daher verstehet man, was regula societatis & mixtionis ist. Wenn nehmlich etliche Personen an etwas Theil haben, und es soll, wenn sich die Summe vermehret oder vermindert, eine proportionirte Theilung vorgenommen werden, so nennet man solches ein Exempel von der regula societatis, oder Gesellschaftsrechnung. Wenn etliche species, oder verschiedene Theile ein Ganzes ausmachen, dies Ganze nimmt zu oder ab, und man will wissen, wie iede einzelne species dadurch zu- oder abnehme.

Exempel.

1. Von der regula societatis. Drey Personen legen 400 Thlr. zusammen, A giebt dazu 240 Thlr. B giebt 100 Thlr. und C giebt 60

Thlr. Sie gewinnen damit 200 Thlr. und die ganze Summe ist nun = 600 Thlr. Wie viel bekommt A, B, C, ieder zu seiner Portion? Dies wird also gerechnet:

Die Rechnung von A.

400 : 240 = 600 : ? R. 360.

600

144000 4|00|1440|00|360

Die Rechnung von B.

400 : 100 = 600 : ? R. 150.

600

60000 4|00|600|00|150

Die Rechnung von C.

400 : 60 = 600 : ? R. 90.

600

36000 4|00|360|00|90

Es bekommt also A 360 Thlr. B 150 und C 90 Thlr. Deren Summe = 600.

2. Von der regula mixtionis. Eine Masse von 2 ℔ bestehet aus vier speciebus. Von der species A sind darinn 24 Loth, von B 20, von C 12, von D 8. Wie viel muß nun von einer ieden specie genommen werden, wenn die ganze Masse 15 ℔ wiegen soll? Hier wird 2 ℔ zu 64 Loth, und 15 ℔ zu 480 Loth angenommen, damit die Zahlen gleichnahmig werden, und so gerechnet:

Die

Die Rechnung von A.

64 : 24 = 480 : ? F. 180 L = 5 ℔ 20 L.

48|0

1920

96

11520

```
     51
64 | 11520|0 | 180
      642
     51
```

Die Rechnung von B.

64 : 20 = 480 : ? F. 150 L = 4 ℔ 22 L.

48|0

96|00

```
     32
64 | 9600|0 | 150
     640
     32
```

Die Rechnung von C.

64 : 12 = 480 : ? F. 90 L = 2 ℔ 26 L.

48|0

96|0

48

5760

```
64 | 5760|0 | 90
     576
```

Die Rechnung von D.

64 : 8 = 480 : ? F. 60 L = 1 ℔ 28 L.

480

3840

```
64 | 384|0 | 60
     384
```

Es kommen also von der specie A zu der 15 ℔ schweren Masse 5 ℔ 20 L. von B 4 ℔ 22 L. von C 2 ℔ 26 L. und von D 1 ℔ 28 L. Deren Summe ist = 15 ℔.

Aufgabe.

§. 138. Wie kann man nach allen diesen Regeln auf eine leichte und kürzere Art rechnen?

Auflösung.

1. Man setzet die gegebene Zahlen in zwey Columnen gegen einander über, so daß niemals gleichnahmige Zahlen in Eine Columne kommen.

2. Wo die vierte Proportionalzahl stehen sollte, macht man ein Sternchen.

3. Kommen in der Proportion Grösen vor, die nicht mit Zahlen ausgedruckt sind, so zeiget man sie durch einen lateinischen Buchstaben an.

4. Man siehet, ob man in beyden Columnen gleich viele Nullen wegstreichen könne, und thut solches.

5. Sind in beyden Columnen Zahlen, die durch einerley Divisor können getheilet werden, so streichet man sie so oft in einer Columne als in der andern weg, und brauchet ihre Quotienten an ihrer Stelle.

6. Wo in beyden Columnen einerley Zahlen sind, streichet man sie in einer Columne so oft als in der andern weg.

7. Sind Brüche vorhanden, so schreibet man ihre Nenner in die andere Columne, und löschet sie unter ihren Zählern aus.

8. Gemischte Zahlen verwandelt man in Brüche, und verfähret nach nr. 7.

9. Die Zahlen, die in einerley Columne übrig bleiben, werden mit einander multipliciret.

10. Das Facit aus der Columne mit dem Stern wird zum Divisor des Products aus der andern Columne gebraucht; und der daraus entstehende Quotient ist die verlangte Proportionalzahl.

Exempel.

Wenn 700 Arbeiter jährlich 100 Tage arbeiten, so bringen sie ein gewisses Werk in drittehalb Jahr zu Stande: Eben dieses Werk sollten 1500 Arbeiter in einem halben Jahre fertig machen; wie viele Tage Arbeit müssen alsdenn auf ein Jahr gerechnet werden? Dies wird folgendergestalt geschrieben und gerechnet:

Geschrieben.

$$X \;—\; \begin{cases} 700 \\ 2\frac{1}{2} \\ 100 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} 1500 \\ \frac{1}{2} \\ * \end{matrix}\right\} — X$$

Gerechnet.

$$X \;—\; \begin{cases} 700 \\ 2\;\frac{1}{2}\;5\;1 \\ 100 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} 3\;\;1500 \\ \frac{1}{2} \\ * \end{matrix}\right\} — X \qquad 3 \,|\, 700 \,|\, 233\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{2}{700}$$

Nehmlich, weil das verlangte Werk nicht mit Zahlen ausgedruckt worden ist, so zeiget

man es durch den Buchstaben X an (nr. 3). Hierauf werden die Proportionalgrösen in die beyde Columnen, nach nr. 1. gesetzet; und weil die Zahl der Tage, die man suchet, die verlangte vierte Proportionalzahl ist, so bemerket man ihre Stelle, wo sie stehen sollte, mit einem Sternchen (nr. 2). Alsdenn streichet man in der Einen Columne bey 1500 zwey Nullen weg, und in der andern eben so viele bey 100, nach nr. 4. Bey dem Bruch $\frac{1}{2}$ löschet man den Nenner 2 aus, und schreibet ihn in die andere Columne, nach nr. 7. Die gemischte Zahl $2\frac{1}{2}$ verwandelt man in den Bruch $\frac{5}{2}$, und setzet den Nenner 2 in die andere Columne, nach nr. 8. Alsdenn hat man die Zahl 5 und 15 in den beyden Columnen. Diese dividiret man mit 5, so kommt statt derselben 1 und 3, nach nr. 5. Man hat auch in beyden Columnen die Zahl 2, und streichet sie in beyden weg (nr. 6). Endlich macht man in der einen Columne das Facit $3 \cdot 1 = 3$, und in der andern $700 \cdot 1 \cdot 1 = 700$ (nr. 9), und zuletzt dividiret man 700 durch 3, weil 3 das Facit aus der Columne mit dem Stern ist (nr. 10): so kommen $233\frac{1}{2}$ Tage, welche auf ein Jahr zur Arbeit müssen gerechnet werden.

Beweis.

Beweis.

Durch nr. 1, 2, 3 kommen die Proportionalzahlen an ihre rechte Stellen, und fallen also §. §. 131, 133, 135 weg. Eben daher wird auch die letzte Division nr. 9, 10 richtig. Durch nr. 4, 5, 6 erleichtert man sich die Rechnung, und bleibt doch immer einerley Verhältniß §. 58. Durch nr. 7, 8 fällt die ganze Bruchrechnung weg; weil aber die versetzten Nenner mit dividiren und multipliciren, so kommt dennoch das nehmliche Facit §. 88.

Erklärung.

§. 139. Diese Auflösung der Regel de Tri heist die **allgemeine Regel des Herrn von Rees**, der sie erfunden hat. Sie ist ein Theil der **welschen Practic** d. i. der sämmtlichen Vortheile und Abkürzungen im Rechnen.

Zusatz.

§. 140. Bleibt in der Columne mit dem Stern nichts, oder nur Einser übrig, so kann man nicht dividiren: Folglich ist die übrige Zahl der andern Columne die verlangte Proportionalzahl.

Exempel.

Für 150 ℔ müßte man 40½ Gulden geben, wie theuer sind 200 ℔? F. 54 fl.

1 3 150 — 40 $\frac{1}{2}$ 81 27

* — 200 4 2

12 — 54

1

F 4 Lehr-

Lehrsatz.

§. 141. Bleibt in der Columne ohne Stern nichts, oder nur Einser übrig, so ist die übrige Zahl der andern Columne der Nenner eines Bruches, dessen Zähler allemal 1 ist.

Exempel.

Wenn 210 Stücke 3 fl. kosten, so kosten 7 Stücke $\frac{1}{10}$ fl = 6 kr.

10 10 210 — 3 1
* — 7 1
10 | 1

Beweis.

Bleiben in der Columne ohne Stern Einser übrig, so ist die Sache für sich klar. Bleibt aber nichts darinn übrig, so hat man auf beyden Seiten gleich viel s weggestrichen §. 138, nr. 4, 6. Folglich hat man eigentlich in ieder von beyden Columnen einerley Zahlen gehabt, die man mit sich selber dividiret hat; daher hat man 1 zum Quotienten bekommen.

Zusatz.

§. 142. Bleibt in beyden Columnen nichts übrig, so ist 1 die gesuchte Proportionalzahl. §. 141.

Exempel.

Für 1 $\frac{2}{3}$ Gulden bekommt man $\frac{2}{3}$ ℔, wie viel bekommt man für 2 $\frac{1}{2}$ Gulden? Antw. 1 ℔.

8 1 $\frac{2}{3}$ — $\frac{2}{3}$
* — 2 1 $\frac{1}{2}$ 8
3
2 3

Zusatz.

Zusatz.

§. 143. Ist die übrige Zahl aus der Columne mit dem Stern grösser, als die aus der andern Columne, so ist jene der Nenner, diese der Zähler eines Bruches §. 138, nr. 10. §. 40. z. E. Ein Capital von 100 fl. giebt 5 fl. Interesse, wie viel geben 15 fl. Capital? F. $\frac{3}{4}$ fl. = 40 xr.

$$\begin{array}{cccc} 4\ \ 20\ \ 100 & — & 5 & 1 \\ * & — & 15 & 3 \quad F.\ \frac{3}{4} \\ \hline 4 & & & 3 \end{array}$$

Aufgabe.

§. 144. Wie bringet man durch die Regel de Tri einen gegebenen Bruch unter eine bestimmte Benennung?

Auflösung.

Man setzet die beyden Nenner in gehöriges Verhältniß §. 131, und suchet zu dem gegebenen Zähler den proportionirten d. i. die vierte Proportionalzahl.

Exempel.

Man sollte finden, wie viel Zehentheilchen des Gulden in $\frac{5}{8}$ fl. enthalten seyen? so rechnet man also:

$$8 : 10 = 5 : ? \quad F.\ 6\tfrac{2}{8}$$

$$\frac{5}{50} \qquad 8 \left| \begin{array}{c} 2 \\ 50 \end{array} \right| 6$$

Daher sind $\frac{5}{8}$ Gulden = 37 $\frac{1}{2}$ kr.

Beweis.

Wenn zwey Brüche gleich sind, so verhält sich der Zähler des ersten zu seinem Nenner, wie der Zähler des andern zu seinem Nenner §. 70. Folglich hat man zwey ähnliche Verhältnisse §. 54. Folglich eine Proportion §. 54. und kann also die Regel de Tri brauchen §. 129.

Lehrsatz.

§. 145. In einer arithmetischen Proportion entstehet das zweyte Glied durch die Addition des ersten Gliedes zum Exponenten, und das vierte Glied entstehet aus der Addition des dritten Gliedes zum Exponenten. z. E. 5 — 7 = 8 — 10. Hier ist 2 der Exponent, und 5 + 2 = 7 und 8 + 2 = 10.

Beweis.

Der Exponent ist hier die Differenz, welche anzeiget, um wie viel Einheiten die erste Zahl kleiner sey, als die andere, und um wie viel die dritte kleiner sey, als die vierte §. 53. Addiret man aber die Differenz wieder zu der kleineren Zahl, so muß die grösere wieder kommen §. 26. Folglich kommt durch die Addition des Exponenten zum ersten Glied das zweyte, und durch die Addition des dritten Gliedes zum Exponenten das vierte Glied. W. Z. E.

Lehrsatz.

§. 146. Wenn man in einer getrennten arithmetischen Proportion das erste Glied zum vierten und das andere zum dritten addiret, so kom-

kommen gleiche Summen. z. E. Bey der Proportion 5 — 20 = 8 — 23 ist 5 + 23 = 28, und 20 + 8 = 28.

Beweis.

Die Summe aus dem ersten und vierten Glied bestehet aus dem ersten Gliede addiret zum dritten und zur Differenz §. 145. Eben aus diesen summirenden Zahlen bestehet auch die Summe des zweyten und dritten Gliedes §. 145. Folglich sind beyde Summen einander gleich §. 22.

Folgerung.

§. 147. In einer zusammenhängenden arithmetischen Proportion ist also die mittlere Zahl doppelt genommen der Summe der beyden äuseren gleich §. 56. z. E. 4 — 8 = 8 — 12. Hier ist 4 + 12 = 16, und 8 + 8 ist ebenfalls = 16.

Aufgabe.

§. 148. Wie findet man in einer arithmetischen zusammenhängenden Proportion die zweyte Proportionalzahl?

Auflösung.

Man summiret die gegebene äusere, und nimmt davon die Hälfte.

Exempel.

Zwischen 7 und 15 ist 11 die mittlere arithmetische Proportionalzahl.

$$\begin{array}{r} 15 \\ 7 \\ \hline 22 \end{array} \qquad 2 \,|\, 22 \,|\, 11$$

Beweis.

Die Summe der gegebenen äuseren ist der mittleren doppelt genommen gleich §. 147. Folglich ist die Hälfte jener Summe der mittleren Proportionalzahl Einmal genommen gleich §. 56.

Aufgabe.

§. 149. Wie findet man zu den zwey ersteren Zahlen einer zusammenhängenden arithmetischen Proportion die dritte Proportionalzahl?

Auflösung.

Man verdoppelt die zweyte, und subtrahiret davon die erste. z. E. 9 — 11 = 11 — ? Antw. 11 + 11 = 22, und 22 — 9 ist = 13. Hier ist 13 die dritte Proportionalzahl.

Beweis.

Hat man in einer zusammenhängenden arithmetischen Proportion das Duplum der zweyten Zahl, so hat man auch die Summe des ersten und dritten Gliedes §. 146. Subtrahiret man also die erste, so bleibt die dritte übrig §. 23.

Aufgabe.

§. 150. Wie findet man in einer getrennten arithmetischen Proportion zu drey Proportionalzahlen die vierte?

Auflösung.

Man addiret das zweyte und dritte Glied, und ziehet von der Summe das erste ab.

Exempel.

2 2 4 — 4 1 3 = 3 4 1 — 5 3 0.

341	
754	754
	224
	530

Beweis.

Hat man in einer getrennten arithmetischen Proportion die Summe der beyden mittleren Glieder, so hat man auch die Summe der beyden äuseren §. 146. Ziehet man also das erste Glied ab, so bleibt das vierte übrig §. 23.

Anmerkung.

§. 151. Bey den arithmetischen Proportionsrechnungen thut man am besten, wenn man die kleinere Zahlen in beyden Verhältnissen, so viel möglich, versetzet; denn die Beweise sind sodenn klärer.

Erklärungen.

§. 152. Eine ganze Reihe Zahlen, die alle in einerley fortlaufendem Verhältniß stehen, machen eine **Progreßion**: die entweder **geometrisch**, oder arithmetisch ist §. 53. z. E. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. ist eine geometrische Progreßion: Aber 2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. ist eine arithmetische Progreßion.

Zusatz.

§. 153. Es entstehet also eine Progreßion, wenn man mehrere zusammenhängende Proportionen auf gehörige Weise zusammensetzet §. 56, 130. z. E. Setzet man die Proportionen

3:

3 : 9 = 9 : 27 und 27 : 81 = 81 : 243 zusammen, so entstehet die geometrische Progreßion 3. 9. 27. 81. 243. Setzet man die Proportionen 4 — 6 = 6 — 8, 8 — 10 = 10 — 12, 12 — 14 = 14 — 16 zusammen, so entstehet die arithmetische Progreßion 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16.

Lehrsatz.

§. 154. In einer geometrischen Progreßion enthält das letzte Glied das erste so oft in sich, als der Name des Verhältnisses anzeiget, iedes der folgenden Glieder aber enthält es Einmal weniger, als der Exponent anzeiget.

Exempel.

In der Progreßion 2. 6. 18. 54 ist der Exponent 3, und 54 enthält daher das erste Glied 2 dreymal, und die beyde folgende Glieder 6 und 18 zweymal. Denn 2 . 3 = 6; 6 . 2 = 12; 18 . 2 = 36 und 6 + 12 + 36 = 54.

Beweis.

In einer geometrischen Progreßion enthält das letzte Glied das ohneinsletzte so oft, als der Exponent anzeiget: oder, welches einerley ist, es enthält das ohneinsletzte Einmal weniger, und hingegen das drittletzte so oft, als der Exponent andeutet; oder dies auch Einmal weniger, und hingegen das viertletzte so oft, als der Exponent aussaget; und so ferner bis zum ersten Gliede, welches denn allemal so oft im letzten Glied übrig bleiben muß, als der Exponent Einheiten enthält §. 152.

Auf-

Aufgabe.

§. 155. Wie findet man die Summe aller Glieder in einer geometrischen Progreßion, wenn das erste Glied, der Exponent, und das letzte Glied gegeben werden?

Auflösung.

1. Man multipliciret das letzte Glied mit dem Namen des Verhältnisses.

2. Von diesem Producte ziehet man das erste Glied ab.

3. Von dem Namen des Verhältnisses ziehet man auch 1 ab.

4. Mit diesem Reste des Exponenten dividiret man den Rest des ersten Products nr. 1, 2.

Exempel.

Das erste Glied wäre 2, der Exponent 5, und das letzte Glied 6250, so ist die Summe aller Glieder so zu finden:

			Probe.
6250			62
5	3		250
31250	4 | 31248	7812	1250
2			6250
31248	F. 7812		7812

Beweis.

Multipliciret man nach nr. 1. so macht man ein neues letztes Glied der Progreßion §. 152, in welchem alle vorhergehende Glieder, ausgenommen das erste, Einmal weniger enthalten sind, als der Name andeutet, das erste aber so

oft, als der Exponent anzeiget §. 154. Ziehet man von diesem neugemachten letzten Gliede das erste Glied Einmal ab, so sind folglich alle vorhergehende Glieder alsdenn Einmal weniger im neuen letzten Gliede, als der Exponent anzeiget §. 23. Dividiret man demnach mit einer Zahl, die um 1 kleiner ist, als der Exponent, so muß man im Quotienten eine Zahl bekommen, welche der Summe aller vorhergehenden Glieder gleich ist; denn diese Summe war vorher mit eben dieser Zahl multipliciret §. 46, 148.

Aufgabe.

§. 156. Wie findet man aus dem gegebenen ersten Gliede einer geometrischen Progreßion, und aus dem Exponenten iedes andere Glied der Progreßion?

Auflösung.

Man multipliciret das erste Glied durch den Exponenten; das hieraus entstehende zweyte Glied wieder mit dem Exponenten; und so fort, bis zu dem verlangten Gliede.

Exempel.

Das erste Glied wäre 5, und der Exponent 4; man sollte das sechste Glied finden: so ist $4 \cdot 5 = 20$, das zweyte Glied; $4 \cdot 20 = 80$, das dritte; $4 \cdot 80 = 320$, das vierte; $4 \cdot 320 = 1280$, das fünfte; $4 \cdot 1280 = 5120$, das sechste Glied.

Beweis.

In der geometrischen Progreßion enthält iedes Glied sein nächst vorhergehendes so oft, als der

der Exponent anzeiget §. 153. Multipliciret man also immer die neuen Glieder mit dem Exponenten, so muß endlich das verlangte Glied kommen.

Erklärung.

§. 157. Wenn eine arithmetische und eine geometrische Progreßion sich so zusammen verhalten, daß die arithmetische Progreßionszahlen anzeigen, aus wie vielmaliger Multiplication des ersten Gliedes der geometrischen Progreßion und derselben Exponenten die übrige geometrische Progreßionsglieder entstanden seyen; so heisen die arithmetische Progreßionszahlen der geometrischen **Localzahlen** (logarithmi).

Zusatz.

§. 158. Folglich müssen zwey solche Progreßionen also angesetzet werden:

2. 4. 8. 16. 32. 64. 128.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

Aufgabe.

§. 159. Wie findet man iedes entfernte Glied einer geometrischen Progreßion aus dem ersten Gliede und dem Exponenten, ohne alle mittlere Glieder durchzurechnen?

Auflösung.

1. Man macht einige der ersten Glieder §. 156.

2. Man bezeichnet dieselbe mit ihren Localzahlen §. 158.

3. Man untersuchet, welche dieser Localzah-

len man addiren müsse, daß die Localzahl des gesuchten geometrischen Gliedes herauskomme, und bezeichnet solche.

4. Man dividiret das geometrische Progreßions-Glied von Einer dieser bezeichneten Localzahlen (nr. 3.) durch das erste Glied der ganzen geometrischen Progreßion, und mit dem gefundenen Quotienten multipliciret man das Progreßionsglied über der andern Localzahl, welche bezeichnet worden: so ist das Facit das verlangte geometrische Progreßionsglied.

Exempel.

Das erste Glied der geometrischen Progreßion wäre 4, und der Exponent 5; man sollte das siebente Glied finden. Die Localzahl desselben ist 6 §. 158. Man machet also einige der ersten Glieder, 4 . 5 = 20, 5 . 20 = 100, 5 . 100 = 500, 5 . 500 = 2500. Dies setzet man an:

4. 20. 100. 500. 2500.
0. 1. 2. 3. 4.

Hier siehet man, daß die Localzahl 6 aus der Addition von 2 zu 4 entstehe, man bezeichnet also derselben geometrische Glieder (nr. 3). Nun dividiret man 2500 durch 4 = 625; dies multipliciret man durch 100 (nr. 4), so ist 62500 das siebente verlangte geometrische Progreßionsglied. Denn 5 . 2500 = 12500, und 12500 . 5 = 62500.

Beweis.

Dividiret man Eines dieser Glieder mit dem ersten Glied der geometrischen Progreßion (nr. 4),

(nr. 4), so bekommt man zum Quotienten heraus, wie oft das erste Glied in demselben stecke §. 40. So oft nun in diesem das erste Glied enthalten ist, so oft muß auch das andere (nr. 3.) gezeichnete Glied in dem unbekannten gesuchten enthalten seyn: Denn es ist um eben so viele Glieder davon entfernt. Folglich muß man mit demselben Quotienten die andere bezeichnete Progreßionszahl (nr. 3.) multipliciren.

Zusatz.

§. 160. So oft man demnach hier zwey solcher (§. 159, nr. 3.) bezeichneten Glieder multipliciren will, so oft muß man Eins derselben mit dem ersten Progreßionsglied dividiren.

Exempel

Man wollte das vorige Exempel §. 159 aus der Addition der Localzahlen 1 + 2 + 3 herausbringen, so dividiret man die geometrische Progreßionszahl 500 über der Localzahl 3 mit dem ersten geometrischen Glied 4 = 125. Dies multipliciret man mit 20 = 2500. §. 159, nr. 4. Ferner dividiret man 100 mit 4 = 25, und damit die vorigen 2500 multipliciret = 62500. Denn durch die erste Rechnung hatte man das fünfte geometrische Glied gefunden, dessen Localzahl 4 mit der Localzahl 2 des dritten Gliedes addiret erst der Localzahl 6 gleich ist.

Aufgabe.

§. 161. Wie findet man die Summe einer geometrischen Progreßion, wenn blos das erste Glied und der Exponent gegeben werden?

Auflösung.

1. Man suchet das letzte Glied §. 159.

2. Man suchet daraus die Summe aller Glieder nach §. 155.

Exempel.

Es sollte iemand den ersten Tag Einen Kreuzer, den zweyten Tag zwey, den dritten 4 u. s. f. geben, wie viel hat er gegeben, wenn er vierzehen Tage nach dieser Progreßion fort giebt? Antwort: 273 fl. 3 kr. Die Rechnung ist folgende:

1. 2. 4. 8. 16. 32. $\overline{64}$. $\overline{128}$.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

128 . 1 = 128; 128 . 64 = 8192; diese 8192 . 2 = 16384; 16384 — 1 = 16383; 16383 . 1 = 16383 kr = 273 fl. 3 kr. d. i. Man macht einige der ersten Glieder bis auf das achte §. 159, nr. 1. und bezeichnet sie mit ihren Localzahlen §. 159, nr. 2. Hier macht die Summe von 6 und 7 in den Localzahlen die Localzahl 13 des vierzehnten verlangten Gliedes aus, man bemerket sie also mit ein paar Strichen §. 159, nr. 3. Ferner dividiret man 128 durch 1 = 128, und multipliciret es durch 64 = 8192; dies ist die vierzehnte geometrische Progreßionszahl §. 129, nr. 4 und so viel muß dieselbe Person den vierzehnten Tag Kreuzer geben. Alsdenn wird 8192 mit 2 multipliciret §. 155, nr. 1. macht 16384; hievon das erste Glied 1 subtrahiret = 16383 §. 155, nr. 2. von dem Exponenten 2 Eins abgezogen = 1 §. 155, nr. 3. und damit das vorige 16383 dividiret = 16383. §. 155, nr. 4.

nr. 4. Diese 16383 Kreuzer zu Gulden reduciret = 273 fl. 3 kr. §. 49.

Beweis.

Ist einerley mit dem Beweis §. 159. und §. 155.

Aufgabe.

§. 162. Wie findet man die Summe aus allen Gliedern einer arithmetischen Progreßion, wenn das erste und letzte Glied gegeben werden?

Auflösung.

Man addiret das erste und letzte Glied, und multipliciret die Summe durch die Hälfte der Anzahl der Glieder.

Exempel.

Von 10 Gewächsen kostete das erste 2 fl, das zehente 11, was kosten alle 10 zusammen, wenn iedes folgende einen Gulden mehr kostet, als das vorhergehende? Antw. 65 fl.

11		13
2	2 | 10 | 5	5
13		65

Aufgabe.

§. 163. Wie findet man iedes entfernte Glied einer arithmetischen Progreßion aus dem ersten Glied derselben und aus dem Exponenten?

Auflösung.

1. Man ziehet von der gesammten Zahl der Glieder 1 ab.

2. Diesen Rest multipliciret man mit der Differenz.

3. Zu dem Facit addiret man das erste Glied der Progreßion.

Exempel.

Zwölf Lectionen sollen so bezahlet werden, daß die erste fünf Gulden, iede folgende aber drey Gulden mehr als die nächste vorhergehende kostet, wie viel kostet also die zwölfte? Antw. 38 Gulden.

12	11	33
1	3	5
11	33	38

Zusatz.

§. 164. Will man sodenn die ganze Progreßion summiren, so verfähret man nach §. 162. z. E. Hier kosten alle zwölf Lectionen zusammen 258 fl.

38	43
5	6
43	258

Aufgabe.

§. 165. Wie findet man, wie oft sich eine gewisse Menge von Dingen versetzen lasse?

Auflösung.

1. Man bezeichnet die Dinge mit den Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. u. s. w. so viel man nehmlich Dinge hat.

2. Man multiplicirt immer das Factum aus den vorhergehenden mit der folgenden Zahl, so ist das allerletzte Factum die Zahl, welche anzeigt, wie oft man versetzen könne.

Exem-

Exempel.

Zwölf Personen sitzen unter einander zu Tische, wie oft können dieselbe ihre Plätze verwechseln, so daß sie keinmal alle so sitzen als wie das erstemal? Antw. 479001600 mal.

A = 1	1	5040
B = 2	2	8
C = 3	2	40320
D = 4	3	9
E = 5	6	
F = 6	4	36288|0
		1|0
G = 7	24	
	5	36288|00
H = 8	120	11|
I = 9	6	
K = 10	720	36288|00
		36288
L = 11	7	
M = 12	5040	39916800

399168|00
12|

7983360 0
399168

479001600

Ende der Rechenkunst.

Exempel.

Zwölf Personen sitzen unter einander zu Tische, wie oft können dieselbe ihre Plätze verwechseln, so daß sie keinmal also sitzen als wie das erstemal? Antw. 479001600mal.

A = 1	1	5040
B = 2	2	8
C = 3	2	40320
D = 4	3	9
E = 5	6	36288|0
F = 6	4	1|0
G = 7	24	
H = 8	5	36288|00
I = 9	120	11
K = 10	6	36288|00
L = 11	720	36288
M = 12	7	39916800
	5040	

399168\|00
12
―――――
79833600
399168
―――――
479001600

Ende der Rechenkunst.

Walther, Jakob Christian,

Jacob Christian Walthers, Rectors des Pädagogii illustris zu Darmstadt, erste Grundsätze der Arithmetik Zum Gebrauche desselbigen Fürstlichen Pä dagogii

Frankfurt am Mayn 1764

Math.p. 632
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083067-2
VD18 10119558